A. hyd.

48 ½

8°

Hoffmann f.,

Der Bau

der

Ketten-Brücken,

begründet auf die

Gesetze des Gleichgewichtes der dabei in Wechselwirkung tretenden Kräfte.

KGIFGH-BIIGKGH

DGL. BVG

'Der Bau

der

Ketten-Brücken,

begründet auf die

Gesetze des Gleichgewichtes der dabei in Wechselwirkung tretenden Kräfte,

und bearbeitet für das

praktische Bedürfniss ohne Hilfe der Differential- und Integral-Rechnung

von

Ferdinand Hoffmann,

Eisenbahn Bau-Inspector der k. k. General-Bau-Direction im h. öst. Ministerium für Handel, Gewerbe und öffentliche Bauten.

Mit 7 Kupfertafeln.

W i e n.

Druck von Carl Gerold & Sohn.

1850.

289. D.

Bayerische Staatsbibliothek München

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort.

Die, in *„Navier's Rapport et Mémoires sur les ponts suspendus, Paris 1823“* der Beschreibung mehrerer dazumal in England schon bestandener Kettenbrücken angeschlossene Theorie der Kettenbrücken ist mit solcher Eleganz und Präzision durchgeführt, dass ich es schon im Jahre 1825, als ich jenes Werk das erste Mal in die Hände bekam, bedauert habe, dass dieselbe einem grossen Theile fachverwandter Ingenieure, theils wegen Unbekanntschaft mit den Grundsätzen der Differential- und Integral-Rechnung, theils wegen Mangel an Kenntniss der französischen Sprache, theils endlich wegen der Kostspieligkeit des Werkes unzugängig ist, und es wurde hierdurch in mir der Gedanke angeregt, jene Theorie, wenn schon nicht ihrem ganzen Umfange nach, so doch in ihren wesentlichsten Theilen ohne Hilfe der Differential- und Integral-Rechnung mathematisch zu begründen, und durch ihre Veröffentlichung in der deutschen Sprache und ohne Anschluss weitläufiger, die Kosten der Auflage so sehr vergrössernder Detail-Zeichnungen schon bestehender Brücken, obige drei Hindernisse der Zugänglichkeit der Navier'schen Theorie zu beheben.

Was dazumal, was schon im Jahre 1825 als Gedanke in mir lebte, habe ich in späteren Jahren, in den Jahren 1833 bis 1840 Muse gefunden zu verwirklichen, so weit es im Manuscripte zu geschehen hatte; und erst mehrere Jahre später, erst im Jahre 1844 gestatteten mir meine Berufsgeschäfte die letzte Hand an das vorliegende Werk anzulegen, worauf weitere sechs Jahre verstrichen sind, ehe dasselbe der Oeffentlichkeit übergeben worden ist.

Wenn trotz der langen Zeit, welche zwischen dem Beginne meiner Arbeit und ihrer Veröffentlichung liegt, dieselbe dennoch den Stempel der Vollkommenheit nicht trägt, so theilt sie das Schicksal vielleicht der meisten menschlichen Produktionen, ohne dass es desswegen zu bedauern sein dürfte, dass sie an das Tageslicht sich gewagt, und es erübriget mir nur mehr anzuführen, dass das vorliegende Werk, wenn schon im Geiste der Navier'schen Theorie bearbeitet, doch so weit auf Selbstständigkeit Anspruch macht, als dasselbe, so wie es vorliegt, auf allgemeine, längst bekannte Lehrsätze der Mathematik und Mechanik begründet ist, ohne dass der eingeschlagene Weg jener sei, welchen Navier genommen; dass auf beiden Wegen meistentheils dieselben Endresultate gefunden worden sind, ist nur eine Bürgschaft mehr für deren mathematische Richtigkeit und hiermit für ihre praktische Anwendbarkeit auf gegebene Fälle, mindestens in so weit, als der Empiriker den Theoretiker zu beurtheilen sich berufen fühlt.

Manches Neue, welches im vorliegenden Werke enthalten ist, verdankt sein Entstehen der Anwendung der Resultate der Navier'schen Theorie auf den im Jahre 1828 in Ausführung gestandenen Bau der Kettenbrücke über den Wienfluss zunächst des Aerarial-Heumagazins auf der Laimgrube in Wien.

Die Rücksichten gegen das Urtheil, welches bezüglich der Resultate mathematischer Untersuchungen über die Erscheinungen der äussern Welt im Allgemeinen gepflogen wird, waren es endlich, welcher wegen dem vorliegenden Werke statt des bezeichnenderen und kürzeren Titels einer „Theorie der Kettenbrücken" derjenige gegeben worden ist, den es wirklich führt, und der gewiss Niemand veranlassen wird, darin Detailzeichnungen zu suchen über die verschiedenartig möglichen Verbindungen der Kettenglieder, über die Befestigung der Wurzelbolzen, über die Unterstützungsweise oder die Befestigungsweise der Ketten auf den Land- oder Mittelpfeilern, über die Konstruktion der Brückenbahnen und dergl.; denn die Grundbegriffe der praktischen Anlage einer Kettenbrücke können bei demjenigen vorausgesetzt werden, welcher im Baufache soweit nicht mehr Laie ist, um sich mit den Untersuchungen über die Bedingungen befassen zu wollen, unter welchen zwischen den verschiedenen Kräften, die bei dem Baue einer Kettenbrücke und ihrer eintretenden Benützung wirksam werden, Gleichgewicht statt findet; würde aber das vorliegende Werk auch Andeutungen enthalten über den praktischen Theil des Kettenbrückenbaues, so wäre es das geworden, woran es bisher auch noch mangelt, nämlich eine „theoretisch-praktische Anweisung zum Entwurfe und Baue der Kettenbrücken", was dessen Zweck nicht war.

Indem also eine „Begründung des Baues der Kettenbrücken auf die Gesetze des Gleichgewichtes der dabei in Wechselwirkung tretenden Kräfte" mit weiter nichts sich befassen kann, als mit der Bestimmung der Grösse der Kräfte, welche die absolute, relative, rückwirkende und detrusive Festigkeit ihrer einzelnen Theile in Anspruch nehmen, um hieraus auf die Stärke schliessen zu können, welche man jedem Theile der Brücke geben muss, um bei den geringsten Kosten die nothwendige Dauer sicher zu stellen; so wird im vorliegenden Werke nach einer kurzen Einleitung, in welcher der Gang der Untersuchungen angedeutet ist, sogleich zur Ableitung der mathematischen Formeln geschritten, durch welche die Figur der Kettenkurven für den Zustand des Gleichgewichtes aller Kräfte bedingt ist, dessen Grundbedingungen dann die Anhaltspunkte geben für alle weiteren, dem Entwurfe und Baue einer Kettenbrücke voranzugehenden Betrachtungen; habe ich durch dasselbe einem praktischen Bedürfnisse der Brückenbaukunde mehr als nothdürftig abgeholfen, so bin ich dadurch auf mein darauf verwendetes Nachdenken genügend belohnt.

Laibach, im Februar 1850.

Der Verfasser.

Allgemeine Betrachtungen

über den

Bau der Ketten-Brücken.

Allgemeine Betrachtungen

über den

Bau der Kettenbrücken.

Unter Kettenbrücken im engeren Sinne des Wortes werden alle Brücken verstanden, bei welchen die Brückenbahn mittelst vertikaler Hängestäbe an frei in der Luft schwebenden, und auf die eine oder die andere Weise in ihren beiden Endpunkten befestigten eisernen Ketten angehängt sich befindet. Die einfachste Art der Befestigung beider Ende der Ketten wäre die, wenn auf jedem Ufer des Flusses eine Felswand sich vorfände, in welcher die Endpunkte der Ketten in einem in diese Wände einzutreibenden Stollen mittelst eiserner Bolzen befestiget würden. Abweichungen hievon sind die Aufführung hölzener, eisener oder gemauerter Stützen oder Pfeiler, die Wegführung der Ketten über dieselben, und deren Befestigung auf der dem Flusse abgekehrten Seite der Stützen oder Pfeiler in dem natürlichen Terrain, oder in den allda angelegten Mauerwerken. In dieser ihrer Verlängerung über die Stützen oder Pfeiler, auf welchen die Ketten ruhen, nehmen sie den Namen der „Spannketten“ an, während sie, so weit die Brückenbahn an denselben angehängt sich befindet, die „Tragketten“ genannt werden.

Trotz des obigen engeren Sinnes des Wortes „Kettenbrücken“ wird indess Niemand Anstand nehmen, die Gesetze, welche bezüglich der Bedingungen obwalten, unter welchen ihre einzelnen Bestandtheile den Kräften, deren Einwirkungen sie ausgesetzt sind, den nothwendigen Widerstand zu leisten vermögen, anzuwenden auf alle Gattungen von „Hängebrücken“, so, dass im weiteren Sinne diese unter jenen subsummirt werden können, insofern nämlich unter „Hängebrücken“ blos solche Brücken verstanden werden, bei welchen die Brückenbahn mittelst vertikaler Hängevorrichtungen an im Raume frei hängenden Seilen von Hanf oder Draht, oder an Ketten von Eisen oder Stahl angehängt wird, während Hängebrücken, bei welchen die Brückenbahn von Sprengwerken getragen wird, ganz anderen Gleichgewichts-Gesetzen unterliegen, als sie für Kettenbrücken im Nach-

folgenden abgeleitet werden, und mit Rücksicht auf deren mögliche Verwechslung mit den anderen der Name „Kettenbrücke“ bezeichnender ist in Beziehung auf den Gegenstand, von dem wir sprechen, als der Name „Hängebrücke“.

Aus der gegebenen Begriffsbestimmung der „Kettenbrücken“ folgt von selbst, dass die erste Untersuchung, in welche wir einzugehen haben werden, die Form oder die Figur ist, welche die freihängenden Ketten — die Tragketten — im Zustande des Gleichgewichtes aller Kräfte annehmen; dem formlos, d. h. ohne eine bestimmte Kenntniss der Form eines jeden Theiles einer Brücke, sie möge durch das Wirken der Kräfte oder durch die freie Wahl des Entwurfes bedingt werden, kann derselbe nicht Gegenstand einer konkreten Behandlung sein, um die es sich bei dem Baue einer Brücke doch vor Allem anderen handelt. Es wird also im ersten Abschnitte der nachfolgenden Theorie das Gesetz ermittelt, nach welchem sich die Tragketten unter ihrer eigenen Last, dann unter jener der angehängten Bahn, biegen oder krümmen, und hierauf begründet wird weiters angegeben, nach welchen verschiedenen Weisen die krumme Linie, welche sie annehmen werden, gezeichnet werden kann.

Aus der nunmehr bekannten Form der Ketten ergibt sich dann auch ihre Länge, man mag sie durch Rechnung, man mag sie durch Zeichnung zu bestimmen haben. Auf letzterem Wege wird sie mit dem Zirkel vom Plane abgenommen, und daher nur genügen, wo eine grössere Genauigkeit nicht nothwendig ist; auf ersterem Wege kann diess nur mittelst eines aus der Natur der Krümmung abzuleitenden Ausdruckes geschehen, durch welchen die Länge der Ketten bedingt wird, wenn deren Spannweite und Pfeilhöhe gegeben ist. Der zweite Abschnitt enthält diese Ableitung, so wie die Beantwortung der verwandten Frage, wie gross sich die Pfeilhöhe ergeben werde, wenn die Spannweite und die Länge der Ketten bekannt ist, was zu wissen insofern wichtig werden kann, als die Ketten in Folge ungenauer Arbeit eine grössere Länge erhalten können, als sie ursprünglich beabsichtet war, und als hierdurch bei dem Einhängen derselben leicht eine solche Senkung des Scheitels herbeigeführt werden kann, dass sie, um nicht bis an die Brückenbahn herabzureichen, oder gar unter dieselbe hinabzugreifen, vor ihrer Anarbeitung noch verkürzt werden müssen; anderer Einwirkungen nicht zu gedenken, welche nach schon erfolgtem Einhängen der Ketten eine Vergrösserung ihrer Pfeilhöhe veranlassen.

Die nächste Frage, nachdem die Figur und die Länge der Tragketten behandelt worden, ist jene über die Grösse der Spannung, welcher sie unter dem Einflusse des eigenen Gewichtes, dann jenes der Brückenbahn und der zufälligen Belastung der letzteren unterliegen werden, also über die Grösse des Querschnittes, den man ihnen geben soll, damit sie dieser Spannung, ohne der Gefahr des Reissens ausgesetzt zu sein, unterzogen werden können. Die Beantwortung dieser Frage ergibt sich aus der Betrachtung der Kräfte, durch deren Einwirkung die Figur der Kettenkrümmung bedingt wird; sie wird im dritten Abschnitte nebst den Grenzen behandelt, bis zu welchen Kettenbrücken überhaupt noch ausführbar sind, so weit diese ihre

Ausführbarkeit abhängig ist von der absoluten Festigkeit des Materiales, aus welchem die Ketten hergestellt werden sollen.

Da aber der Zustand des Gleichgewichtes der Kräfte, welcher die Figur der Kettenkrümmung bedingt, durch zufällige Belastungen der Bahn gestört werden kann, so wird hierdurch auch eine Veränderung bewirkt werden in der Figur der Kettenkurven; aber nicht blos hierdurch, sondern auch durch die Dehnbarkeit des Eisens, durch Temperaturwechsel, durch die Beweglichkeit der Stützen, und durch andere ähnliche Ursachen können Veränderungen bewirkt werden in der Länge der Tragketten, in ihrer Spannweite und in ihrer Pfeilhöhe; insoweit nun solche Veränderungen auch Einfluss nehmen können auf den Bestand der Brücke, ist es von Wichtigkeit sich vorhinein Rechenschaft geben zu können über die Grenzen dieses Einflusses auf die Abweichungen von jener Form der Krummen und von jener Spannung der Ketten, wie sie mit Absehung von diesen Einflüssen nach den drei ersten Abschnitten bedingt wird; der vierte Abschnitt enthält die bezüglichen Untersuchungen.

Nicht minder wichtig, als die Beantwortung der Frage über die Grösse der Tragkettenspannung, also über die Grösse des erforderlichen Tragkettenquerschnittes, ist die Beantwortung der Frage, inwieweit durch die Tragkettenspannung die Spannung, also auch die Stärke der Spannketten bedingt werde, und inwieweit beide Spannungen die rückwirkende und die statische Festigkeit der Stützen oder der Pfeiler in Anspruch nehmen, durch welche die Ketten im Raume freischwebend erhalten werden, vorausgesetzt, dass die Spannketten, unter möglichst spitzen Winkeln von der Horizontalen abweichend, in geneigter Richtung ihren Befestigungspunkten zugeführt werden; im fünften Abschnitte werden die hierauf bezüglichen Untersuchungen angestellt.

Weniger die rückwirkende und die statische Festigkeit der Pfeiler, als ihre detrusive Festigkeit wird gefährdet bei jenen Brücken, bei welchen die Spannketten nicht unter einem spitzen Winkel, sondern vertikal in den Boden treten, um allda ihre Wurzelbefestigung zu finden; die Bedingungen, unter welchen für eine solche Anordnung die Festigkeit der Pfeiler gesichert ist, sind daher im sechsten Abschnitte Gegenstand besonderer Untersuchungen; derselbe enthält nebstdem allgemeine Andeutungen über die verschiedenen Arten, nach welchen die Befestigung der Wurzelblätter geneigter und vertikaler Spannketten erfolgen kann, und in welcher Weise in jedem speziellen Falle der Widerstand in Betracht zu ziehen ist, welcher das Ausreissen, Abbrechen oder Abschieben der Wurzelbefestigung verhindern soll.

Indem endlich die unvermeidliche Beugung der Spannketten und das Gleiten der Ketten über die Land- und Mittelpfeiler Bewegungen der Pfeiler und der Brückenbahn zulässt, welche auf den Bestand der Brücke und auf die Passage störend einwirken können, so war es nothwendig auch darüber Untersuchungen anzustellen, wie weit der Einfluss der Spannkettenbeugung und wie weit der Einfluss des Gleitens der Ketten über die Land- und Mittelpfeiler bei zufälligen Belastungen und Entlastungen der Brückenbahn

zu fürchten ist, insbesondere aber in jenen Fällen, wo mehrere, durch Mittelpfeiler geschiedene Brückenbahnen der Flussbreite nach auf einander folgen, ohne gleichmässig durch zufällige Belastungen in Anspruch genommen zu werden; indem dieser Gegenstand in dem siebenten Abschnitte behandelt wird, werden damit die beabsichteten Untersuchungen über den Bau der Kettenbrücken geschlossen.

Womit zu den in Rede gestandenen Untersuchungen selbst übergegangen wird.

Theorie der Kettenbrücken.

Erster Abschnitt.

Ableitung der Gleichung und graphische Konstruktion der Krummen, welche die Tragketten bilden.

---

1. Wird ein schwerer, vollkommen biegsamer, unausdehnbarer Faden *AOB Fig. 1.* mit seinen beiden Endpunkten in *A* und *B* aufgehangen, so bildet er in Folge der Einwirkung der Schwere eine krumme Linie, welche von dem Gesetze abhängig ist, nach welchem die einzelnen Theilchen dieses Fadens belastet sind, d. h. nach welchem sie an eigenem Gewichte entweder zunehmen, abnehmen oder unverändert bleiben.

Um daher zur Gleichung der Krümmung zu gelangen, welche dieser Faden je nach seiner verschiedenen Belastungsweise annehmen wird, muss man vor Allem das Gesetz ermitteln, nach welchem er belastet ist.

Da man nun die Tragketten einer Kettenbrücke als ähnliche, in ihren Bestandtheilen leicht bewegliche und mehr oder weniger unausdehnbare Fäden ansehen kann, welche theils durch ihr eigenes Gewicht, theils durch das Gewicht der an denselben hängenden Brückenbahn belastet sind, so ergibt sich aus dem Gesagten, dass wir uns früher mit der Bestimmung des Gesetzes der Belastung der Tragketten zu beschäftigen haben, ehe wir zur Untersuchung des Gesetzes ihrer Krümmung, d. h. zur Ableitung ihrer Krümmungsgleichung schreiten können.

2. Nun ersehen wir bei der Betrachtung der Konstruktion der Kettenbrücken, dass das Gewicht, welches die Krümmung der tragenden Kettenbogen bedingt, auf drei verschiedene Arten innerhalb der Aufhängepunkte der Ketten vertheilt ist. Es stellt sich nämlich dar, dass

1. das Gewicht der Ketten *AOB Fig. 2.* als auf ihre Länge gleichförmig vertheilt angenommen werden könne; denn die geringen Gewichtsunterschiede ihrer auf einander folgenden Elemente, welche eine Folge der Verbindungsweise der einzelnen Kettenglieder sind, dürfen darum ausser Acht gelassen werden, weil durch sie die Krümmung der Ketten selbst dann äusserst wenig modifizirt wird, wenn diese ausser ihrem eigenen Gewichte keine weitere Last zu tragen haben; um so weniger können also obige Gewichtsunterschiede auf die Krümmung der Ketten einen bemerklichen Einfluss nehmen, wenn sie nebst ihrem eigenen Gewichte auch das ihre Krümmung bei weitem mehr bestimmende Gewicht der Brückenbahn zu tragen haben;

2. bemerken wir, dass das Gewicht der Hängestangen, mittelst welcher die Brückenbahn von den Kettenbogen getragen wird, weder gleichförmig auf die Länge des Bogens *AOB*, noch gleichförmig auf die Spannweite *AB* vertheilt ist, indem wegen der vom Scheitel *O* gegen die Aufhängepunkte *A* und *B* stets zunehmenden Länge dieser Hängestangen auch ihr Gewicht in dieser Richtung immer grösser wird;

3. endlich ist klar, dass das Gewicht der von der horizontalen Lage stets nur unbedeutend abweichenden Brückenbahn *DE* als gleichförmig auf die Spannweite *AB* vertheilt angesehen werden kann, indem die aus der Konstruktion der Bahn wiederkehrenden Gewichtsverschiedenheiten darum keine Beachtung verdienen, weil einerseits die unter den einzelnen Bahntheilen stattfindende Verbindung ein isolirtes und somit ungleichförmiges Einwirken dieser verschiedenen Gewichtsvertheilungen auf die Krümmung der Ketten nicht zulässt, andrerseits das Einwirken dieser Gewichte auf die Ketten nur durch die in nahe gleichen Abständen angebrachten Hängestangen herbeigeführt wird.

Eine vollkommen genügende Ableitung der Gleichung jener Krümmung, welche die tragenden Kettenbogen unter dem Einflusse der besprochenen drei verschiedenartigen Gewichtsvertheilungen annehmen, würde demnach erfordern, dass bei der Ableitung dieser Gleichung auch auf jede dieser verschiedenen Belastungsweisen der Tragketten besondere Rücksicht genommen werde. Eine auf der ganzen Brückenbahn gleichförmig vertheilte zufällige Belastung hat auf die Krümmung der Ketten auf analoge Weise Einfluss wie das Gewicht der Brückenbahn.

3. So leicht die Beobachtung dieser drei verschiedenen Gewichtsvertheilungen ist, so schwierig ist es, die fragliche Gleichung der Kettenkrümmung mit Berücksichtigung der Verschiedenheit dieser Gewichtsvertheilungen abzuleiten; daher haben bisher die Meisten derjenigen, welche sich mit dieser Ableitung beschäftigten, angenommen, dass nicht nur das Gewicht der Brückenbahn und der allfällig darauf gleichförmig vertheilten zufälligen Belastung, sondern auch jenes der Ketten und der Hängestangen innerhalb der Spannweite gleichförmig vertheilt sei, d. h. angenommen, dass solchen Theilen *bb* *Fig.* 2. des Bogens *AOB*, welche in ihrer Horizontal-Projektion gleich langen Theilen *aa* der Spannweite entsprechen, von dem Gesammtgewichte der Bahn, Hängestangen und Ketten und der allfälligen zufälligen Belastung ein gleich grosser Gewichtsantheil entfalle, oder dass von den, gleichen Theilen *aa* der Spannweite *AB* zugehörigen Theilen *bb* des Kettenbogens *AOB* ein gleicher Antheil der freischwebenden Gesammtlast getragen werde.

In der That kann diess aber auch anstandslos geschehen, denn einerseits ist das Gewicht der Hängestangen im Vergleiche mit dem Gewichte der Brückenbahn so gering, dass die durch das verschiedene Gewicht der Hängestangen verursacht werdenden ungleichförmigen Gewichtsvertheilungen keinen bemerkbaren Einfluss auf die Figur der Krummen ausüben können, und anderseits weichen die, wegen der schiefen Lage der einzelnen Kurventheile für gleiche Längen der Spannweite verschieden entfallenden Bogentheile wegen der stets sehr flach anzuordnenden Traghogen so wenig an Länge und daher auch an Gewicht von einander ab, dass ihre Gewichtsunterschiede gleich den

Gewichtsverschiedenheiten der Hängestangen wegen der immer verhältnissmässig zu sehr überwiegenden Gesammtlast bei der Ableitung der Kurvengleichung keine Berücksichtigung verdienen.

Indem uns das Zulassen der Hypothese, dass das, zwischen *A* und *B* freihängende Gesammtgewicht auf die Länge des Bogens *AOB* nach der Länge der Spannweite *AB*, oder kurzweg — »auf die Spannweite« gleichförmig vertheilt sei, erlaubt, sobald das Gewicht für die laufende Einheit der Spannweite bekannt ist, die Schwere des ganzen Bogens durch das Produkt aus diesem Gewichte in jene Spannweite, und die Schwere eines jeden beliebigen Bogentheiles durch das Produkt aus dem erwähnten Einheitsgewichte in die Länge seiner horizontalen Projektion auszudrücken, vereinfachen sich die, zum Entwerfen der Hängebrücken dienenden Formeln in einem Grade, der sie zum praktischen Gebrauche sehr bequem macht, ohne dass dadurch das Vertrauen auf ihre Verlässlichkeit geschwächt werden könne, sobald diese ungleichförmige Vertheilung nicht die Folge anderer als der vorhin besprochenen Ursachen ist: daher die nachfolgenden Ableitungen in obiger Voraussetzung geschehen werden.

4. Sei, um in der aufgestellten Voraussetzung zur Gleichung der Kurve der tragenden Bogen zu gelangen, *ABC... XYZ Fig. 3.* ein System symetrisch langer, nicht schwerer und unbiegsamer, in den Punkten *A, B, C...* *X, Y, Z* leicht beweglich verbundener, in *A* und *Z* aufgehangener Linien. Wird nun nach und nach in jedem der Punkte *B, C... X, Y* ein Gewicht *p* angehängt, so wird durch die Einwirkung dieser Gewichte so lange eine Bewegung des ganzen Systems vor sich gehen, bis nach Anhängung sämmtlicher Gewichte von den Mittelkräften, welche sich aus den einzelnen, auf jeden Punkt wirkenden Kräften ergeben, jede für sich gleich *Null* ist, weil alsdann keine Ursache mehr vorhanden ist, warum sich einer oder der andere der einzelnen Verbindungspunkte nach irgend einer Richtung bewegen sollte: das ganze System wird alsdann im Zustand der Ruhe, in dem Zustand des Gleichgewichtes sich befinden.

5. In diesem Zustande wird jede der einzelnen Linien *AB, BC, CD...* ihrer Länge nach mit einer Kraft in Anspruch genommen, d. i. gespannt werden, welche von der Grösse der Gewichte *p*, von der Entfernung der Auflhängepunkte *A* und *Z* und von der Gesammtlänge aller Linien *AB, BC CD....* abhängig ist. Die Kraft, mit welcher diese Linien gespannt werden, nennt man die Spannung dieser Linien: sie sei für jede der einzelnen, von *A* bis zum Scheitel *N* befindlichen Linien der Ordnung nach

$$t', t'', t''', t^{IV} \ldots . t^{n-2}, t^{n-1}, t^{n}$$

und die Winkel, welche diese Linien mit dem Horizonte einschliessen, seien eben so der Ordnung nach

$$\alpha', \alpha'', \alpha''', \alpha^{IV} \ldots . \alpha^{n-2}, \alpha^{n-1}, \alpha^{n}$$

dabei bezeichnet, wie für sich erhellt, t^n die Spannung der am tiefsten oder zunächst des Scheitels des Poligons liegenden Linie, und daher α^n den Winkel, welchen eben diese Linie mit dem Horizonte einschliesst.

6. Wird nun die Kraft, mit welcher die Linie *AB Fig. 3.* gespannt wird, durch $Aa = bB$; die Spannung der Linie *BC* durch $Bc = dC$; jene

der Linie *CD* durch $Ce = fD$ u. s. f. dargestellt und jede dieser Kräfte in eine horizontale und vertikale Seitenkraft zerlegt gedacht, so drücken der angeführten Ordnung nach,

$$t' Cos\alpha',\ t'' Cos\alpha'',\ t''' Cos\alpha''' \ldots . t^{n-1} Cos\alpha^{n-1},\ t^n Cos\alpha^n$$

die horizontalen, und

$$t' Sin\alpha',\ t'' Sin\alpha'',\ t''' Sin\alpha''' \ldots . t^{n-1} Sin\alpha^{n-1},\ t^n Sin\alpha^n$$

die vertikalen Seitenkräfte der einzelnen Spannungen aus. Die Wirkung, welche je zwei Seitenkräfte einer und derselben Spannung auf den zugehörigen Punkt ausüben, ist offenbar einerlei mit jener, welche diese Spannung selbst auszuüben im Stande ist; daher findet der Zustand des Gleichgewichtes in dem in Rede stehenden Funikular-Polygone statt, oder es sind die Mittelkräfte, welche aus den beiden Spannungen, deren Angriffe jeder einzelne Punkt *B, C, D ... X, Y,* ausgesetzt ist, und aus dem angehängten Gewichte *p* hervorgehen, gleich *Null,* sobald sowohl die Summe jener, aus diesen sich ergebenden Seitenkräfte, welche jeden einzelnen Punkt horizontal zu verschieben, als auch die Summe jener, welche ihn vertikal auf- oder abwärts zu bewegen suchen, für sich gleich *Null* ist, d. i., sobald sich die in horizontalen aber entgegengesetzten Richtungen wirkenden Seitenkräfte eben so, wie die vertikalen, aber auch nach entgegengesetzten Richtungen wirksamen Seitenkräfte und Gewichte wechselseitig aufheben. —

7. Es zieht nun aber die, in der Geraden *AB* statt findende Spannung t' den Punkt *A* horizontal von *A* gegen *Z* hin mit einer Kraft, welche durch obige horizontale Seitenkraft

$$t' Cos\alpha'$$

ausgedrückt wird; vertikal abwärts wird dieser Punkt dagegen durch obige vertikale Seitenkraft der Spannung t', d. i. mit einer Kraft gezogen, die durch

$$t' Sin\alpha'$$

gegeben ist; die Wirkung beider Kräfte aber wird dadurch aufgehoben, dass der Punkt *A* als unbeweglich fest angenommen wurde.

Den Punkt *B* zieht in Folge der in der Linie *AB* statt findenden Spannung t' horizontal von *B* nach der linken Seite hin eine Kraft, welche durch die erwähnte horizontale Seitenkraft der Spannung t', d. i. durch

$$t' Cos\alpha'$$

dargestellt wird; und in Folge der, in der Geraden *BC* statt findenden Spannung t'' wird er nach der rechten Seite horizontal mit einer Kraft gezogen, welche durch die obige Zerlegung der Spannung t'' für die horizontale Seitenkraft sich ergibt, und durch

$$t'' Cos\alpha''$$

ausgedrückt wird: soll sich der Punkt *B* daher weder nach der einen, noch nach der andern Seite hin bewegen, oder soll in demselben überhaupt keine horizontale Ortsveränderung vor sich gehen, so müssen beide Kräfte einander nothwendig gleich, oder es muss

$$t' Cos\alpha' = t'' Cos\alpha''$$

seyn; eben dieses gilt bezüglich der horizontalen Seitenkräfte von allen übrigen Punkten. In vertikaler Richtung zieht den Punkt *B* nach aufwärts jene Kraft, welche durch die Zerlegung der, in den Geraden *AB* statt findenden

Spannung t' in die erwähnten Seitenkräfte für die vertikale entfällt, d. i. eine Kraft, welche gegeben ist durch

$$t' Sin x' ;$$

vertikal abwärts aber wird derselbe Punkt B nicht nur durch das angehängte Gewicht p, sondern auch noch durch jene Kraft gezogen, welche durch die Zerlegung der in der Geraden BC statt findenden Spannung t'' in eine horizontale und vertikale Seitenkraft nach letzterer Richtung sich ergibt, d. i., mit einer Kraft, welche ausgedrückt wird durch

$$t'' Sin x'' ;$$

soll sich nun dieser Punkt weder auf- noch abwärts bewegen, oder überhaupt keinerlei vertikale Ortsveränderung erleiden, so muss offenbar

$$t' Sin x' = t'' Sin x'' + p$$

seyn; das Gleiche gilt bezüglich der vertikalen Seitenkräfte in jedem andern Punkte.

Es sind daher für die Punkte B bis N

$$\left.\begin{array}{rcl}
t' Cos x' & = & t'' Cos x'' \\
t'' Cos x'' & = & t''' Cos x''' \\
t''' Cos x''' & = & t^{v} Cos x^{v} \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . & & \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . & & \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . & & \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . & & \\
t^{n-2} Cos x^{n-2} & = & t^{n-1} Cos x^{n-1} \\
t^{n-1} Cos x^{n-1} & = & t^{n} Cos \alpha^{n} \\
t^{n} Cos \alpha^{n} & = & t^{n} Cos \alpha^{n}
\end{array}\right\} \; I.$$

und

$$\left.\begin{array}{rcl}
t' Sin x' & = & t'' Sin x'' + p. \\
t'' Sin x'' & = & t''' Sin x''' + p. \\
t''' Sin x''' & = & t^{v} Sin x^{v} + p. \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & & \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & & \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & & \\
. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & & \\
t^{n-2} Sin x^{n-2} & = & t^{n-1} Sin x^{n-1} + p. \\
t^{n-1} Sin x^{n-1} & = & t^{n} Sin x^{n} + p. \\
2 t^{n} Sin x^{n} & = & p.
\end{array}\right\} \; II.$$

die Gleichungen, welche das Gleichgewicht in dem bisher betrachteten Funikular-Polygone unter der Einwirkung der Gewichte p bedingen; denselben Gleichungen muss für den Zustand des Gleichgewichtes des ganzen Systems, wenn von V bis N vorgeschritten wird, Genüge geschehen.

8. Die ersten dieser Gleichungen, jene unter *I.* da hiernach

$$t' Cos x' = t'' Cos x'' = t''' Cos x''' = \ldots . \; t^{n-1} Cos x^{n-1} = t^{n} Cos x^{n}$$

ist, geben zu erkennen, dass, welches auch immer das Verhältniss der Spannungen

$$t', \; t'', \; t''' \ldots . \; t^{n-1}, \; t^{n}$$

und der Winkeln

$$\alpha', \; \alpha''. \; \alpha''' \ldots . \; \alpha^{n-1}, \; \alpha^{n}$$

zu einander sein mag, durch Zerlegung dieser Spannungen in horizontale

und vertikale Seitenkräfte für die erstere in allen Punkten ein und derselbe Werth erhalten werde.

Weil aber die, diese Wahrheit begründenden Gleichungen unabhängig sind von der Länge der einzelnen Linien *AB, BC, CD* ...., so werden die horizontalen Seitenkräfte der in den verschiedenen Linien statt findenden Spannungen, wenn letztere in eine horizontale und vertikale Seitenkraft zerlegt werden, auch dann einander durchgehends gleich bleiben, wenn die Längen dieser Linien so klein gedacht werden, dass die Punkte *A, B, C* ... *X, Y, Z* als die Anhängepunkte der unmittelbar auf einander folgenden Punkte einer ihrer ganzen Länge nach gleichförmig schweren, durch den Scheitel *N* gehenden Horizontalen *GH* angesehen werden können, in welchem Falle das Funikular-Polygon als eine kontinuirliche Krumme betrachtet werden kann, für welche

$$t', t'', t''' \ldots\ldots t^{n-1}, t^n$$

die in der Richtung der Tangenten der einzelnen Punkte statt findenden Spannungen, des Bogens *AOB Fig. 4.* ferner

$$\alpha', \alpha'', \alpha''' \ldots\ldots \alpha^{n-1}, \alpha^n$$

die Winkel, welche diese Tangenten mit dem Horizonte einschliessen, und *p* das Gewicht der einzelnen Punkte der Horizontalen *GH* darstellt.

Da ferner im Scheitel oder im tiefsten Punkte der Krummen die Tangente horizontal liegt; so ist die in diesem Punkte statt findende tangentiale Spannung mit der für diesen Punkt entfallenden horizontalen Seitenkraft einerlei, und somit das Mass der horizontalen Seitenkräfte aller übrigen tangentialen Spannungen, oder mit andern Worten: die horizontale Spannung jedes andern Punktes ist der tangentialen Spannung des Scheitelpunktes gleich. Nimmt man daher das Kurvenstück *Am* weg, und bringt man in dem Punkte *m* eine, der tangentialen Spannung im Scheitel gleiche Kraft horizontal von *m* gegen *n* hin wirkend an, so ist dieser Punkt gegen jede horizontale Ortsveränderung gesichert, und, damit der Zustand des Gleichgewichtes des ganzen Systems nicht gestört werde, nur noch erforderlich, dass vertikal nach *o* hin eine Kraft wirke, welche der vertikalen Seitenkraft der in dem Punkte *m* zur Zeit des Vorhandenseins des Bogens *Am* in der Richtung der Tangente *mt* statt gehabten Spannung gleich ist.

Weil nun das, was von dem Punkte *m* gesagt worden, für jeden andern Punkt der Krummen gilt, so werden wir diesen, in jedem Punkte gleich grossen horizontalen Zug fortan »die horizontale Spannung« der Krummen nennen.

9. Aus der letzten der vorhin unter *II.* aufgestellten Gleichungen ergibt sich weiter

$$t^n Sin x^n = \frac{qp}{2};$$

dieser Ausdruck in die nächst vorhergehende Gleichung eingeführt, gibt

$$t^{n-1} Sin x^{n-1} = \frac{3p}{2};$$

dieser Werth in die drittletzte Gleichung substituirt, gibt

$$t^{n-2} Sin x^{n-2} = \frac{5p}{2};$$

wird auf diese Weise fortgefahren, so findet man

$$t^{n-3}Sin\chi^{n-3} = \frac{7p}{2}$$

$$t^{n-4}Sin\chi^{n-4} = \frac{9p}{2}$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$t'''Sin\chi''' = \left(\frac{2n-5}{2}\right)p.$$

$$t''Sin\chi'' = \left(\frac{2n-3}{2}\right)p.$$

$$t'Sin\chi' = \left(\frac{2n-1}{2}\right)p.$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass die vertikale Seitenkraft irgend einer der stattfindenden Spannungen gleich ist der Summe aller von dem zugehörigen Punkte abwärts bis zum Scheitel angehängten Gewichte, von deren letzten im Scheitel befindlichen jedoch nur die Hälfte zu nehmen ist: die andere Gewichtshälfte kommt in der That bei der andern Kurvenhälfte in Anschlag. Der in den Aufhängepunkten *A* und *Z* statt findende vertikale Zug oder Druck ist demnach der halben Summe aller in den einzelnen Polygonpunkten angekängten Gewichte gleich.

Werden nun abermal die Punkte *A, B, C* . . . . *X, Y, Z,* einander so nahe gerückt gedacht, dass sie als die Aufhängepunkte der, in allen ihren Punkten dem Gewichte *p* gleich schweren, durch den Scheitel *N* gehenden Horizontalen angesehen, und somit das Funikular-Polygon *A, B, C* . . . *X, Y, Z,* als eine kontinuirliche Krumme betrachtet werden kann, so ist, weil auch der so eben rücksichtlich der vertikalen Seitenkräfte der einzelnen Spannungen abgeleitete Satz unabhängig von der Länge der einzelnen Linien sich erweist, die vertikale Seitenkraft der in irgend einem Kurvenpunkte statt findenden tangentialen Spannung dem Gewichte des, zwischen der Projektion dieses Punktes auf die Horizontale *GH* und dem Scheitel *N* der Krummen liegenden Theiles dieser Geraden gleich, und sonach nicht, wie die horizontalen Seitenkräfte eine sich in allen Punkten gleich bildende, sondern eine je nach der Lage des Punktes veränderliche Kraft.

10. Nunmehr sei *AOB, Fig. 5,* ein vollkommen biegsamer, in *A* und *B* befestigter Faden, welcher unter der Einwirkung einer, nach *AB* gleichförmig vertheilten Belastung im Zustande des Gleichgewichtes sich befindet, und *p* derjenige Theil der von dem Bogen *AOB* zu tragenden Gesammtlast, welcher Einem Theile der in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt gedachten Linie *AB* entfällt, und so dasjenige Gewicht, welches man sich in dem vertikal entsprechenden Kurventheilchen aufgelegt oder angehängt denken kann: für Kettenbrücken offenbar derjenige Theil, welcher von dem Gesammtgewichte der Bahn, der Hängestangen und der Ketten für die laufende Einheit der Spannweite entfällt.

Wird nun in einem beliebigen Punkte *M* die Tangente *MR* gezogen, und in dieser Richtung von *M* gegen *R* hin eine Kraft *R* wirkend gedacht,

welche so gross ist, als die in jenem Punkte statt findende tangentiale Spannung, so kann der Theil *MB* das Fadens weggenommen werden, ohne das Gleichgewicht der Krummen zu stören.

Während so *R* die tangentiale Spannung für den Punkt *M* darstellt, mag *T* die tangentiale Spannung für die Aufhängepunkte *A* und *B*, *Q* die horizontale Seitenkraft der einen wie der andern, und *V* die vertikale Seitenkraft der Spannung *R*, — *P* die vertikale Seitenkraft der Spannung *T* bezeichnen; endlich sei φ der Winkel, unter welchem die Tangente in *M*, und α der Winkel, unter welchem die in den Aufhängepunkten *A* und *B* gezogenen Tangenten von der horizontalen Lage abweichen.

11. Wird ferner *O* als der Koordinaten-Ursprung, und eine in diesem Punkte die Krumme berührende Horizontale *IK* als Abscissenachse, $ON = x$ als die in jenen Einheitstheilchen, in welche die Spannweite getheilt gedacht worden, ausgedrückte Abscisse, $NM = y$ als die zugehörige Ordinate des Punktes *M*, und *p* als das Gewicht, welches den, den Einheitstheilchen der Spannweite vertikal entsprechenden Bogentheilchen zukommt, angenommen, so ist nach Art: (8)

$$T\,Cos\,\alpha = R\,Cos\,\varphi = Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und nach Art. (3) und Art. (9) ist

$$V = px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und

$$P = ph \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wenn *h* die Anzahl der Einheitstheilchen der halben Spannweite bezeichnet; mithin ist auch

$$\frac{V}{P} = \frac{x}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

In dem durch die Zerlegung der Spannungen *R* und *T* in die erwähnten Seitenkräfte sich ergebenden Kräftenparallelogramme ist aber

$$V = Q\,tang\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und

$$P = Q\,tang\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

mithin weiters

$$\frac{V}{P} = \frac{tang\,\varphi}{tang\,\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

also auch durch Kombination der Gleichungen (4) und (7)

$$\frac{tang\,\varphi}{tang\,\alpha} = \frac{x}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

12. Um aus dieser letzten Gleichung die trigonometrischen Tangenten der Winkeln φ und α zu eliminiren, und hiedurch statt dieser Gleichung eine andere zu erhalten, welche ausser den Grössen *x* und *h* nur noch die dem Punkte *M* zugehörige Ordinate *y* und die Pfeilhöhe *CO* der Krummen, die wir mit *f* bezeichnen wollen, enthält, muss wieder auf das Funikular-Polygon zurückgegangen werden.

In diesem ist nach Art. (8)

$$t'\,Cos\,x' = Q$$

und nach Art. (9)

$$t'\,Sin\,x' = \left(\frac{2n-1}{2}\right)p;$$

die letzte Gleichung durch die vorhergehende dividirt, gibt

$$tang\ \alpha' = \left(\frac{2n-1}{2\ Q}\right) p$$

eben so ist nach Art. (8)

$$t''Cos\alpha'' = Q$$

und nach Art. (9)

$$t''Sin\alpha'' = \left(\frac{2n-3}{2}\right) p;$$

die letzte Gleichung durch die vorletzte getheilt, gibt

$$tang\ \alpha'' = \left(\frac{2n-3}{2\ Q}\right) p;$$

und so wird ferner

$$tang\ \alpha''' = \left(\frac{2n-5}{2\ Q}\right) p;$$

$$tang\ \alpha^{IV} = \left(\frac{2n-7}{2\ Q}\right) p;$$

. . . . . .

. . . . . .

$$tang\ \alpha^{(n-2)} = \frac{5p}{2Q}$$

$$tang\ \alpha^{n-1} = \frac{3p}{2Q}$$

$$tang\ \alpha^{n} = \frac{p}{2Q}$$

gefunden.

Diese Gleichungen geben zu erkennen, dass die trigonometrischen Tangenten der Winkeln, welche die auf einander folgenden Geraden *AB*, *BC*, *CD* .... *Fig. 3.* im Zustande des Gleichgewichtes des ganzen Systems mit dem Horizonte einschliessen, eine arithmetische Reihe des ersten Ranges bilden.

Da nun diese Wahrheit als von der Länge der einzelnen Linien *AB*, *BC*, *CD* .... unabhängig sich darstellt, so findet dieser Satz auch bei der Krummen, welche wir bisher betrachtet haben, und deren, gleichen horizontalen Projektionen entsprechende Theile gleich belastet sind, in Beziehung auf eben diese Theile, und zwar um so richtiger seine Anwendung, je kleiner diese Theile gedacht werden.

13. Denkt man sich daher die Spannweite $AB = 2h$ *Fig. 6.* in eine beliebige Anzahl, zB. in $2n$ gleiche Theile getheilt, und in jedem Theilungspunkt *a, b, c* .... eine Lothrechte $aa', bb', cc' \ldots$., und dort, wo jede dieser Lothrechten die Krumme trifft, eine berührende Gerade $Aa', a'b', b'c' \ldots$. gezogen, ferner die symetrisch liegenden Punkte beider Kurvenarme mit einander verbunden endlich n so gross, dass jedes einzelne Kurventheilchen mit der zugehörigen Tangente in eine Linie zusammenfällt, es mag n zu diesem Ende wie gross auch immer gedacht werden müssen, so kann die Pfeilhöhe $CO = f$ ausgedrückt werden durch die Gleichung

$$\begin{aligned} f &= Cx''' + a'''b''' + b'''c''' + \ldots\ldots \\ &= aa' + a''b' + b''c' + \ldots\ldots \\ &= \frac{h}{n} tang\ x' + \frac{h}{n} tang x'' + \frac{h}{n} tang x''' + \ldots + \frac{h}{n} tang x^{n-1} + \frac{h}{n} tang x^{n} \end{aligned}$$

$$= \frac{h}{n} (tang\, \alpha' + tang\, \alpha'' + tang\, \alpha''' + \ldots + tang\, \alpha^{n-1} + tang\, \alpha^{n})$$

in welchen Gleichungen

$$\alpha', \ \alpha'', \ \alpha''' \ldots\ldots \alpha^{n-1}, \ \alpha^{n}$$

die Winkeln bezeichnen, welche die einzelnen Kurventheile oder die mit ihnen zusammenfallenden Tangenten mit dem Horizonte einschliessen.

Die Summe der innerhalb der Klammern befindlichen trigonometrischen Tangenten der letzten Gleichung ist nun aber, da dieselben nach Art. (12) eine arithmetische Reihe des ersten Ranges bilden, gegeben durch

$$\frac{n}{2} (tang\, \alpha' + tang\, \alpha^{n}),$$

dieser Werth in die für f aufgestellte letzte Gleichung eingeführt, verwandelt dieselbe in

$$f = \frac{h}{2} (tang\, \alpha' + tang\, \alpha^{n}).$$

Nun ist aber für die vorliegende Krumme der Winkel α' identisch mit jenem, welcher bisher mit α bezeichnet wurde, daher

$$tang\, \alpha' = tang\, \alpha;$$

ferner der Winkel α^{n}, da die Tangente im Scheitel horizontal liegt, und somit das mit dieser zusammen fallende Kurventheilchen mit dem Horizonte parallel lauft, gleich *Null*, daher

$$tang\, \alpha^{n} = 0.$$

Diese Werthe in die letzte, für f entwickelte Gleichung eingeführt, gehen

$$f = \frac{h\, tang\, \alpha}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Es ist nicht schwer einzusehen, dass eben so für den Punkt M, *Fig. 5.* Art. (10)

$$y = \frac{x\, tang\, \varphi}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

gefunden werde; man darf sich zu diesem Ende nur beiderseits die von M aufwärts liegenden Theile der Krummen wegdenken, wornach man es mit einer Kurve zu thun hat, deren Spannweite $= 2x$, und deren Pfeilhöhe $= y$ ist.

Die Gleichung (10) durch die Gleichung (9) getheilt, gibt aber

$$\frac{tang\, \varphi}{tang\, \alpha} = \frac{hy}{Fx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

eine Gleichung, welche mit der Gleichung (8), Art. (11) kombinirt, indem man nämlich beide für das Verhältniss der trigonometrischen Tangenten der Winkeln φ und α dort und hier gefundenen Werthe einander gleich setzt, und hieraus y bestimmt, als Gleichung der fraglichen Krummen

$$y = \frac{fx^{2}}{h^{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

finden lässt.

14. Mittelst dieser Gleichung ist man nunmehr im Stande, für jede beliebige Abscisse x die zugehörige Ordinate y durch Rechnung zu finden, und sie dient sofort vor allem Andern zu einer möglichst genauen Verzeichnung der Krummen. Zur Berechnung der Hängestangenlängen kann sie nur in jenen Fällen gut angewendet werden, wo die Hängestangen gleich weit von einander entfernt angeordnet werden können, was aber ungleiche Längen

der Kettenglieder voraussetzt. — Da diese in den wenigsten Fällen zulässig sind, so ist es nöthig, eine Gleichung zu suchen, mittelst welcher die, gegebenen Kettenlängen zugehörigen Hängestangenlängen berechnet werden können. Wir werden eine solche Gleichung im nächsten Abschnitte finden.

Die Gleichung (12), auf welche, wie wir sehen, die Grösse der Belastung keinen Einfluss hat, ist übrigens jene einer apollonischen Parabel, deren Parameter, d. i. deren durch den Brennpunkt gehende, zur Tangente des Scheitels gleichlaufende Sehne oder Achse, wenn sie mit p bezeichnet wird, bedingt ist durch die Gleichung

$$p = \frac{h^2}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Die Entfernung des Brennpunktes dieser Parabel von ihrem Scheitel, da sie stets dem vierten Theile des Parameters gleich kommt, aber ist, wenn wir sie mit e bezeichnen, gegeben durch die Gleichung

$$e = \frac{h^2}{4f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

15. Indem jetzt weiter aus der Gleichung (9) Art. (13)

$$tang\ \alpha = \frac{2f}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

gefunden wird, gibt diese Gleichung ein Mittel an die Hand, — indem man vorerst nach derselben die trigonometrische Tangente des Winkels berechnet, welchen die Ketten im Aufhängepunkte mit dem Horizonte einschliessen, — die Grösse dieses Winkels mit Zuziehung von trigonometrischen Tafeln zu bestimmen.

Durch die Konstruktion wird die Grösse des Aufhängewinkels und die Lage der die Krumme im Aufhängepunkte berührenden Geraden dadurch gefunden, dass man die Pfeilhöhe *CO Fig. 7.* vom Scheitel *O* abwärts in der Verlängerung der *CO* nach *D* hin aufträgt, und den Punkt *D* mit den Aufhängepunkten *A* und *B* verbindet; offenbar ist alsdann *AD* und *BD* die Lage der gesuchten Tangenten, und der Winkel $CAD = CBD = \alpha$ der der Spannweite $AB = 2h$, und der Pfeilhöhe $CO = f$ entsprechende Aufhängewinkel, denn es ist in dem Dreiecke *ACD*

$$2f : h = Tang\ CAD : 1$$

also

$$tang\ CAD = \frac{f2}{h.}$$

16. Um eben so die der Spannweite $2h$ und Pfeilhöhe f zugehörige Parabel durch Konstruktion finden zu können, muss vorerst ihr Parameter gesucht werden. Trägt man zu diesem Ende die halbe Spannweite $AC = h$ *Fig. 8.* in der Verlängerung von $OC = f$, und zwar von *O* nach *V* hin auf, zieht man sofort *VW* parallel zu *AB*, bis diese die verlängerte Sehne *OB* in *W* schneidet, so ist *VW* die Länge des gesuchten Parameters, denn es ist alsdann, wie es die Gleichung (13) erfordert, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke *OCB* und *OVW*

$$f : h = h : VW$$

also

$$VW = \frac{h^2}{f}$$

Nun gibt der vierte Theil dieser Linie VW von O nach R aufgetragen, den Brennpunkt R dieser Parabel, welcher sofort zur Construction ihrer Krümmung dient, da von diesem und von der, in der Entfernung

$$OS = OR = \tfrac{1}{4}VW$$

zur Tangente des Scheitels gleichlaufend gezogenen Geraden IK alle Punkte der Parabel AOB gleichweit abstehen müssen.

Beschreibt man daher mit einem beliebigen Halbmesser RM, der übrigens, um einen Punkt zu finden, welcher dem Theile AOB der in der Rede stehenden Parabel angehört, grösser als OR, und kleiner als BR sein muss, einen Bogen mm, und macht man $SN = RM$, zieht man endlich durch N eine zu IK Gleichlaufende NM, bis diese den vorhin beschriebenen Bogen mm in M schneidet, so ist M ein Punkt der fraglichen Parabel, denn er ist von dem Punkte R und der Geraden IK, da $HM = SN$ ist, gleich weit entfernt.

Wird auf gleiche Weise eine beliebige Anzahl von Punkten ermittelt, so geben diese mit einander verbunden, die gesuchte Krumme.

Ueber die Aufhängepunkte hinaus sind ferner, wenn man durch den Brennpunkt R die Gerade FE parallel zu IK zieht, und

$$FR = RE = \tfrac{1}{2}VW$$

macht die Punkte E und F, als Endepunkte des Parameters, der fraglichen Parabel angehörige Punkte.

Durch die stetige Bewegung eines Stiftes aber kann die fragliche Parabel verzeichnet werden, indem man an die Gerade IK ein rechtwinklichtes Dreieck GHK anlegt, und das eine Ende eines der Kathede GH gleich langen Fadens in G, das andere in R befestigt, sofort diesen in der Art anspannt, dass der Stift während der Weiterbewegung des Dreieckes GHK an der Geraden IK, fortwährend an der Seite GH dieses Dreieckes anliegend bleibe. In der That ist alsdann für jeden Punkt M

$$RM + MG = GH = GM + MH$$

also auch

$$RM = MH$$

oder der Abstand jedes Punktes M von R und IK gleich gross.

17. Will man endlich von der Gleichung (12) zur Verzeichnung der Krummen mittelst hiernach zu berechnender Ordinaten Gebrauch machen, so wird man sich die Arbeit erleichtern, wenn man die Ordinaten für konstant, und zwar um eine der Länge der ersten Abscisse gleiche Grösse, zunehmende horizontale Entfernungen sucht.

Man hat alsdann blos nöthig, sich die Ordinate für diese erste Abscisse nach jener Gleichung (12) unmittelbar zu berechnen, indem die darauf folgenden übrigen, eben so weit von einander, als die erste vom Scheitel, entfernten, durch die Multiplikation dieser ersten Ordinate mit den Quadraten der natürlichen Zahlen, d. i. mit

$$4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36\ \ldots\ .$$

sich ergeben. In der That findet man, wenn die erste Abscisse x gleich a ist, für die zugehörige Ordinate

$$y' = \frac{fa^2}{h^2}.$$

Geht x in $2a$ über, so ist das zugehörige

$$y'' = \frac{4fa^2}{h^2} = 4y'.$$

So erhält man, wenn x in $3a$ übergeht

$$y''' = \frac{9fa^2}{h^2} = 9y'.$$

Setzt man statt x in jener Gleichung $4a$, so wird

$$y^{IV} = \frac{16fa^2}{h^2} = 16y'$$

u. s. f., woraus denn die Richtigkeit des Gesagten für sich einleuchtet.

Dass man sich auf gleiche Art die Berechnung der Hängestangenlängen erleichtern kann, wenn diese von einander eben so weit, wie die erste vom Scheitel der Krummen abstehen, bedarf keiner besondern Erwähnung.

18. Durch Konstruktion kann die Länge für einzelne, von einander eben so weit, wie die erste vom Scheitel abstehende Ordinaten einer Parabel *AOB, Fig. 9,* deren Parameter $p = \frac{f^2}{h}$, Spannweite $AB = 2h$, und Pfeilhöhe $EO = f$ ist, und welche sonach der Gleichung (12) angehört, dadurch gefunden werden, dass man ein Rechteck *ABCD* verzeichnet, dessen längere Seiten der gegebenen Spannweite $2h$, und dessen kürzere Seiten der gegebenen Pfeilhöhe f gleich sind. Theilt man alsdann die längere Seite *CD* in eine gerade, übrigens beliebige Anzahl gleicher Theile, und in halb so viel gleiche Theile die kürzere Seite *AD* oder *BC,* verbindet man ferner den in die Mitte der Geraden *DC* fallenden Theilungspunkt *O* mit den Theilungspunkten b', b'', b'''.... der Geraden *AD* oder *BC,* so geben die in den Theilungspunkten a', a'', a'''.... der Geraden *OC* errichteten Senkrechten $a'c'$, $a''c''$, $a'''c'''$.... bis zu ihren Durchschnittspunkten c', c'', c'''.... mit den früher gezogenen Geraden Ob', Ob'', Oc'''.... verlängert, die Länge der zu suchenden Ordinaten.

Denn, wenn wir die im m^{ten} Theilungspunkte *N* auf solche Art, d. i. durch das Ziehen der Geraden *OM,* und ihren Durchschnitt mit der Geraden *NP* ermittelte Ordinate *NP* mit y, und die zugehörige Abscisse *ON* mit x, endlich mit n die Anzahl der Theile bezeichnen, in welche wir die halbe Gerade *CD,* oder die halbe Spannweite, und somit auch die Gerade *AD* oder *BC* oder die Pfeilhöhe zum Behufe obiger Konstruktion getheilt haben, so ist offenbar

$$x = m\left(\frac{h}{n}\right) = \frac{mh}{n}$$

mithin

$$\frac{m}{n} = \frac{x}{h}.$$

Eben so ist, wie für sich einleuchtet,

$$MD = m\left(\frac{f}{n}\right) = \frac{mf}{n} = \frac{fx}{h}.$$

Nun ergibt sich aber aus der Aehnlichkeit der Dreiecke *ONP* und *ODM*

$$ON : NP = OD : DM.$$

oder

$$x : y = h : \frac{fx}{h}$$

woraus denn

$$y = \frac{fx^2}{h^2}$$

gefunden wird. Demnach gehören die Ordinaten $a'c'$, $a''c''$, $a'''c'''$ .... der fraglichen Parabel AOB an, und ihre Endpunkte c', c'', c''' .... mit einander verbunden, geben ebenfalls die gesuchte Krumme.

Zweiter Abschnitt.

Länge der Krummen bei gegebener Spannweite und Pfeilhöhe; und Pfeilhöhe der Krummen bei gegebener Spannweite und Länge der Ketten.

---

19. Um nunmehr zu einem Ausdrucke zu gelangen, nach welchem die Länge der parabolischen Krummen *AOB, Fig. 10*, welche wir bisher betrachtet haben, berechnet werden kann, wenn ihre Spannweite und Pfeilhöhe gegeben ist, wollen wir uns die Spannweite $AB = 2h$, abermal in eine beliebige Anzahl, z. B. in $2n$ gleiche Theile getheilt, und dabei n wieder so gross angenommen denken, dass, wenn man von den einzelnen Theilungspunkten $a, b, c \ldots$ der Geraden AB vertikale Linien auf die Krumme herablässt, die zwischen je zwei dieser Linien fallenden Theilchen Aa', $a'b'$, $b'c' \ldots$ so klein werden, dass sie in der That als gerade Linien angesehen werden können. Zieht man nun durch jeden der so entstehenden Theilungspunkte der Krummen eine Gleichlaufende zur Tangente des Scheitels, und bezeichnen, wie bisher

$$\alpha', \alpha'', \alpha''', \alpha^{IV} \ldots\ldots \alpha^{n-1}, \alpha^n$$

die Winkeln, welche die auf einander folgenden Kurventheilchen mit dem Horizonte einschliessen, und

$$l', l'', l''', l^{IV} \ldots\ldots l^{n-1}, l^n$$

die Längen der einzelnen dieser Theilchen, so ist in den kleinen rechtwinklichten Dreiecken, welche diese Längen zur Hypothenuse haben, und der Kurvenkrümmung nach auf einander folgen

$$l' = \frac{h}{n}\sqrt{1 + tang^2\alpha'}$$

$$l'' = \frac{h}{n}\sqrt{1 + tang^2\alpha''}$$

$$l''' = \frac{h}{n}\sqrt{1 + tang^2\alpha'''}$$

$$l^{V} = \frac{h}{n}\sqrt{1 + tang^2\alpha^{IV}}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$l^{n-1} = \frac{h}{n}\sqrt{1 + tang^2\alpha^{n-1}}$$

$$l^n = \frac{h}{n}\sqrt{1 + tang^2\alpha^n}$$

Zieht man die angezeigten Wurzeln nach dem binomischen Lehrsatze wirklich aus, so geben diese Ausdrücke über in

$$l' = \frac{h}{n}\left(1 + \frac{1}{2}\,tang^2\alpha' - \frac{1}{2.4}tang^4\alpha' + \frac{1.3.}{2.4.6}\,tang^6\alpha' - \quad . \; . \; . \; . \; . \right)$$

$$l'' = \frac{h}{n}\left(1 + \frac{1}{2}\,tang^2\alpha'' - \frac{1}{2.4}\,tang^4\alpha'' + \frac{1.3}{2.4.6}\,tang^6\alpha'' - \quad . \; . \; . \; . \; . \right)$$

$$l''' = \frac{h}{n}\left(1 + \frac{1}{2}\,tang^2\alpha''' - \frac{1}{2.4}\,tang^4\alpha''' + \frac{1.3}{2.4.6}\,tang^6\alpha''' - \quad . \; . \; . \; . \; . \right)$$

$$l^{IV} = \frac{h}{n}\left(1 + \frac{1}{2}\,tang^2\alpha^{IV} - \frac{1}{2.4}tang^4\alpha^{IV} + \frac{1.3}{2.4.6}\,tang^6\alpha^{IV} - \quad . \; . \; . \; . \; . \right)$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$l^{n-1} = \frac{h}{n}\left(1 + \frac{1}{2}\,tang^2\alpha^{n-1} - \frac{1}{2.4}\,tang^4\alpha^{n-1} + \frac{1.3}{2.4.6}\,tang^6\alpha^{n-1} - \quad . \; . \; . \; . \right)$$

$$l^n = \frac{h}{n}\left(1 + \frac{1}{2}\,tang^2x^n - \frac{1}{2.4}\,tang^4\alpha^n + \frac{1.3}{2.4.6}\,tang^6\alpha^n - \quad . \; . \; . \; . \right)$$

Bezeichnen wir nun mit l die halbe Länge des ganzen Bogens AOB, oder die Länge des Kurvenarmes $AO = OB$, so ist offenbar

$$l = l' + l'' + l''' + l^{IV} + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + l^{n-1} + l^n \; ;$$

substituiren wir also die eben für die einzelnen Kurventheilchen ermittelten Längen, so erhalten wir durch Addition derselben

$$l = h + \frac{h}{2n}\left(tang^2\alpha' + tang^2\alpha'' + tang^2x''' + . + tang^2\alpha^{n-1} + tang^2\alpha^n\right) -$$

$$- \frac{h}{2.4.n}\left(tang^4\alpha' + tang^4\alpha'' + tang^4x''' + . + tang^4\alpha^{n-1} + tang^4\alpha^n\right) +$$

$$+ \frac{1.3.h}{2.4\,6.n}\left(tang^6\alpha' + tang^6\alpha'' + tang^6\alpha''' + . + tang^6\alpha^{n-1} + tang^6\alpha^n\right) -$$

$$- \frac{1.3.5.h}{2.4.6.8.n}\left(tang^8\alpha' + tang^8\alpha'' + tang^8\alpha''' + . + tang^8\alpha^{n-1} + tang^8\alpha^n\right) +$$

$$+ \text{ u. s. f.}$$

wenn die gleichnamigen Potenzen der Tangenten in eine Klammer zusammen gezogen werden.

20. Um nun aus dieser letzten Gleichung die darin vorkommenden Tangentenreihen zu entfernen, und statt derselben die gegebene Pfeilhöhe und Spannweite eingeführt zu erhalten, müssen wir uns wieder erinnern, dass die trigonometrischen Tangenten der auf einander folgenden Winkeln.

$$\alpha', \; \alpha'', \; \alpha''', \; \alpha^{IV} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \alpha^{n-1}, \; \alpha^n,$$

da sie nach Art (8) die Abweichungen vom Horizonte für jene Theilchen bezeichnen, an deren Ende die gleich schweren Punkte einer durch den Scheitel O gelegt gedachten, der Geraden AB gleich langen Horizontalen GH, angehängt gedacht werden können, nach Art (12) eine arithmetische Reihe des ersten Ranges bilden.

Nun wird, wie bekannt, der Unterschied zweier auf einander folgenden Glieder einer solchen Reihe, wenn wir das erste Glied mit a, das letzte

mit s, die Anzahl ihrer Glieder mit n, endlich die fragliche Differenz mit d bezeichnen, ausgedrückt durch

$$d = \frac{a-s}{n-1.}$$

diess auf die in Rede stehende Tangentenreihe

$$tang\,\alpha' + tang\,\alpha'' +, tang\,\alpha''' + \ldots + tang\,\alpha^{n-1} + tang\,\alpha^{n}$$

angewendet, gibt für dieselbe

$$d = \frac{tang\,\alpha' - tang\,\alpha^{n}}{n-1}$$

oder da, wie bereits Art. (13) bemerkt worden,

$$tang\,\alpha' = tang\,\alpha$$

und

$$tang\,\alpha^{n} = o.$$

ist, so wird für die fragliche Reihe

$$d = \frac{tang\,\alpha}{n-1.}$$

sein. Um diese eben ermittelte Grösse ist also jede, einem von den Aufhängepunkten entfernteren Neigungswinkel zugehörige trigonometrische Tangente kleiner als ihre nächst vorhergehende, und man kann somit, da, wie gesagt, der Winkel α' identisch mit dem Winkel α, und der Winkel α^{n} gleich Null ist, statt der Reihe

$$tang\,\alpha' + tang\,\alpha'' + tang\,\alpha''' + tang\,\alpha^{iv} + \ldots + tang\,\alpha^{n-1} + tang\,\alpha^{n}$$

substituiren die Reihe

$$tang\,\alpha + \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) tang\,\alpha + \left(1 - \frac{2}{n-1}\right) tang\,\alpha + \left(1 - \frac{3}{n-1}\right) tang\,\alpha +$$
$$\ldots + \left(\frac{2}{n-1}\right) tang\,\alpha + \left(\frac{1}{n-1}\right) tang\,\alpha$$

oder

$$\left(\frac{n-1}{n-1}\right) tang\,\alpha + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) tang\,\alpha + \left(\frac{n-3}{n-1}\right) tang\,\alpha + \left(\frac{n-4}{n-1}\right) tang\,\alpha + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{2}{n-1}\right) tang\,\alpha + \left(\frac{1}{n-1}\right) tang\,\alpha,$$

indem der Zähler der innerhalb der Klammern eingeschlossenen Brüche, da n eine ganze Zahl ist, von Glied zu Glied um Eins abnimmt, bis er endlich, nämlich für $tang\,\alpha^{n}$, in Null übergeht.

Es ist sonach auch

$$tang^2\alpha' + tang^2\alpha'' + tang^2\alpha''' + tang^2\alpha^{iv} + \ldots + tang^2\alpha^{n-1} + tang^2\alpha^{n} =$$
$$= \left(\frac{n-1}{n-1}\right)^2 tang^2\alpha + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 tang^2\alpha + \left(\frac{n-3}{n-1}\right)^2 tang^2\alpha + \left(\frac{n-4}{n-1}\right)^2 tang^2\alpha +$$
$$\ldots + \left(\frac{2}{n-1}\right)^2 tang^2\alpha + \left(\frac{1}{n-1}\right)^2 tang^2\alpha$$

und eben so

$$tang^4\alpha' + tang^4\alpha'' + tang^4\alpha''' + tang^4\alpha^{iv} + \ldots + tang^4\alpha^{n-1} + tang^4\alpha^{n} =$$
$$= \left(\frac{n-1}{n-1}\right)^4 tang^4\alpha + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^4 tang^4\alpha + \left(\frac{n-3}{n-1}\right)^4 tang^4\alpha + \left(\frac{n-4}{n-1}\right)^4 tang^4\alpha +$$
$$\ldots + \left(\frac{2}{n-1}\right)^4 tang^4\alpha + \left(\frac{1}{n-1}\right)^4 tang^4\alpha$$

ferner

$$tang^6\alpha' + tang^6\alpha'' + tang^6\alpha''' + tang^6\alpha^{iv} + \ldots + tang^6\alpha^{n-1} + tang^6\alpha^n =$$
$$= \left(\frac{n-1}{n-1}\right)^6 tang^6\alpha + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^6 tang^6\alpha + \left(\frac{n-3}{n-1}\right)^6 tang^6\alpha + \left(\frac{n-4}{n-1}\right)^6 tang^6\alpha +$$
$$\ldots\ldots + \left(\frac{2}{n-1}\right)^6 tang^6\alpha + \left(\frac{1}{n-1}\right)^6 tang^6\alpha$$

u. s. f.

Werden in diesen Reihen die gemeinschaftlichen Faktoren herausgenommen, und die Ordnung der Glieder verkehrt, so erhält man

$$tang^2\alpha' + tang^2\alpha'' + tang^2\alpha''' + tang^2\alpha^{iv} + \ldots + tang^2\alpha^{n-1} + tang^2\alpha^n =$$
$$= \frac{tang^2\alpha}{(n-1)^2}\left[1+4+9+16+25+36+\ldots+(n-3)^2+(n-2)^2+n-1)^2\right];$$
$$tang^4\alpha' + tang^4\alpha'' + tang^4\alpha''' + tang^4\alpha^{iv} + \ldots + tang^4\alpha^{n-1} + tang^4\alpha^n =$$
$$= \frac{tang^4\alpha}{(n-1)^4}\left[1+16+81+256+625+1296+\ldots+(n-3)^4+(n-2)^4+(n-1)^4\right];$$
$$tang^6\alpha' + tang^6\alpha'' + tang^6\alpha''' + tang^6\alpha^{iv} + \ldots + tang^6\alpha^{n-1} + tang^6\alpha^n =$$
$$= \frac{tang^6\alpha}{(n-1)^6}\left[1+64+729+4096+15625+\ldots+(n-3)^6+(n-2)^6+(n-1)^6.\right]$$

u. s. f.

Nun ist die innerhalb der Klammern eingeschlossene Reihe in der ersten dieser Gleichungen eine arithmetische Reihe des zweiten Ranges, in der zweiten Gleichung eine Reihe des vierten Ranges, in der dritten eine Reihe des sechsten Ranges u. s. f. In der That wird, wenn man mit $\triangle^1 r$ die erste, mit $\triangle^2 r$ die zweite, mit $\triangle^3 r$ die dritte, mit $\triangle^4 r$ die vierte, mit $\triangle^5 r$ die fünfte, mit $\triangle^6 r$ die sechste Differenzreihe u. s. f. bezeichnet, indem man die Glieder der ersten Reihe von einander abzieht, als erste Differenzreihe

$$\triangle^1 r = 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11. \ldots$$

und als zweite Differenzreihe

$$\triangle^2 r = 2.\ 2.\ 2.\ 2. \ldots\ldots$$

also bereits die zweite Differenz konstant gefunden. Dagegen erhält man durch die Subtraktion der Glieder der zweiten Reihe und jener der sich so ergebenden Differenzreihen von einander nach und nach folgende Differenzreihen.

$$\triangle^1 r = 15.\ 65.\ 175.\ 369.\ 671.\ 1105. \ldots$$
$$\triangle^2 r = 50.\ 110.\ 194.\ 302.\ 434. \ldots\ldots$$
$$\triangle^3 r = 60.\ 84.\ 108.\ 132. \ldots\ldots$$
$$\triangle^4 r = 24.\ 24.\ 24. \ldots\ldots$$

daher erst die vierten Differenzen als konstant sich ergeben.

So findet man für die dritte jener Reihen

$$\triangle^1 r = 63.\ 665.\ 3367.\ 11529\ 31031.\ 70993.\ 144495.\ 269297.$$
$$\triangle^2 r = 602.\ 2702.\ 8162.\ 19502.\ 39962.\ 73502.\ 124802. \ldots$$
$$\triangle^3 r = 2100.\ 5460.\ 11340.\ 20460.\ 33540.\ 51300. \ldots$$
$$\triangle^4 r = 3360.\ 5880.\ 9120.\ 13080.\ 17760. \ldots$$
$$\triangle^5 r = 2520.\ 3240.\ 3960.\ 4680. \ldots\ldots$$
$$\triangle^6 r = 720.\ 720.\ 720. \ldots\ldots$$

also erst die sechste Differenzreihe konstant, u. s. f.

Diese eben gemachte Bemerkung, dass die innerhalb der Klammern befindlichen Reihen des vorigen Artikels der zweiten, vierten, sechsten etc. Ordnung angehören, macht uns nunmehr die Summirung derselben möglich. Es ist nämlich, wie bekannt die allgemeine Summenformel für m Glieder einer Reihe jeden Ranges, deren erstes Glied $= a$, deren erstes Glied der ersten Differenzreihe $= \triangle^1 a$, deren erstes Glied der zweiten Differenzreihe $= \triangle^2 a$, deren erstes Glied der dritten Differenzreihe $= \triangle^3 a$, deren erstes Glied der vierten Differenzreihe $= \triangle^4 a$ u. s. f. ist gegeben durch

$$S = m.a + \frac{m(m-1)}{1.2}\triangle^1 a + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\triangle^2 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\triangle^3 a +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5.}\triangle^4 a +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5.6.}\triangle^5 a +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3.4.5.6.7.}\triangle^6 a + \ldots$$

Diese Summenformel geht für die vorliegenden Reihen, da in denselben die Anzahl der Glieder, oder $m = n-1$ ist, über in

$$S = (n-1)a + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}\triangle^1 a + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.}\triangle^2 a +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.}\triangle^3 a. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(a-5)}{1.2.3.4.5.}\triangle^4 a +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3.4.5.6.}\triangle^5 a +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4.5.6.7.}\triangle^6 a. + \ldots$$

oder in

$$S = (n-1)a + \left(\frac{n^2-3n+2}{1.2.}\right)\triangle^1 a + \left(\frac{n^3-6n^2+11n-6}{1.2.3..}\right)\triangle^2 a +$$
$$+ \left(\frac{n^4-10n^3+35n^2-50n+24}{1.2.3.4.}\right)\triangle^3 a +$$
$$+ \left(\frac{n^5-15n^4+85n^3-225n^2+274n-120}{1.2.3.4.5.}\right)\triangle^4 a +$$
$$+ \left(\frac{n^6-21n^5+175n^4-735n^3+1624n^2-1764n+720}{1.2.3.4.5.6.}\right)\triangle^5 a +$$
$$+ \left(\frac{n^7-28n^6+322n^5-1960n^4+6769n^3-13132n^2+13068n-5040}{1.2.3.4.5.6.7.}\right)\triangle^6 a + .$$

Um nun hiernach die Summe der $(n-1)$ Glieder der im vorigen Artikel besprochenen Reihe des zweiten Ranges zu finden, wird man darin

$$a = 1., \quad \triangle^1 a = 3, \triangle^2 a = 2 \text{ und } \triangle^3 a = \triangle^4 a = \text{etc. } \ldots = o$$

zu setzen haben: auf solche Art erhält man, wenn die Summe aller Glieder dieser Reihe mit S' bezeichnet wird,

$$S' = (n-1) + \left(\frac{n^2-3n+2}{2.}\right)3 + \left(\frac{n^3-6n^2+11n-6}{6.}\right)2, \text{ oder}$$

$$S' = \frac{6(n-1)+9(n^2-3n+2)+2(n^3-6n^2+11n-6)}{6.} \text{ oder}$$

$$S' = \frac{1}{6}\left[\begin{array}{l} 2n^3-12n^2+22n-12. \\ +9n^2-27n+18. \\ +6n-6. \end{array}\right\} \text{ oder endlich}$$

$$S' = \frac{2n^3 - 3n^1 + n}{6.}$$

Die Summe der $(n-1)$ Glieder jener Reihe des vierten Ranges, da für dieselbe

$$a = 1.,\ \triangle^1 a = 15,\ \triangle^2 a = 50,\ \triangle^3 a = 60,\ \triangle^4 a = 24;\ \text{und}$$
$$\triangle^5 a = \triangle^6 a = \text{etc. . . . . } = o$$

ist, aber ist gegeben durch

$$S'' = (n-1) + \left(\frac{n^2-3n+2}{1.2.}\right)15 + \left(\frac{n^3-6n^2+11n-6}{1.2.3.}\right)50 +$$
$$+ \left(\frac{n^4-10n^3+35n^2-50n+24}{1.2.3.4.}\right)60 +$$
$$+ \left(\frac{n^5-15n^4+85n^3-225n^2+274n-120.}{1.2.3.4.5.}\right)24 \text{ oder durch}$$

$$S'' = \frac{30(n-1)+225(n^2-3n+2)+250(n^3-6n^2+11n-6)+75(n^4-10n^3+35n^2-50n+24)}{30.} +$$
$$+ \frac{6(n^5-15n^4+85n^3-225n^2+274n-120)}{30.}, \text{ oder durch}$$

$$S'' = \tfrac{1}{30}\left[\begin{array}{rrrrrrr} 6n^5 & -90n^4 & +510n^3 & -1350n^2 & +1644n & -720. \\ & +75n^4 & -750n^3 & +2625n^2 & -3750n & +1800. \\ & & +250n^3 & -1500n^2 & +2750n & -1500. \\ & & & +225n^2 & -675n & +450. \\ & & & & +30n & -30. \end{array}\right\} \text{oder endlich durch}$$

$$S'' = \frac{6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n}{30.}$$

Und so ist für die Reihe des sechsten Ranges

$$a = 1,\ \triangle^1 a = 63,\ \triangle^2 a = 602,\ \triangle^3 a = 2100,\ \triangle^4 a = 3360,\ \triangle^5 a = 2520,$$
$$\triangle^6 a = 720;\ \text{und}\ \triangle^7 a = \triangle^8 a = \text{etc. . . . } = o.$$

Diese Werthe in die letzte allgemeine Summenformel eingeführt, geben für die Summe der $(n-1)$ Glieder jener Reihe des sechsten Ranges.

$$S''' = (n-1) + \left(\frac{n^2-3n+2}{1.2.}\right)63 + \left(\frac{n^3-6n^2+11n-6}{1.2.3.}\right)602 +$$
$$+ \left(\frac{n^4-10n^3+35n^2-50n+24}{1.2.3.4.}\right)2100 +$$
$$+ \left(\frac{n^5-15n^4+85n^3-225n^2+274n-120}{1.2.3.4.5.}\right)3360 +$$
$$+ \left(\frac{n^6-21n^5+175n^4-735n^3+1624n^2-1764n+720}{1.2.3.4.5.6.}\right)2520 +$$
$$+ \left(\frac{n^7-28n^6+322n^5-1960n^4+6769n^3-13132n^2+13068n-5040}{1.2.3.4.5.6.7.}\right)720; \text{ oder}$$

$$S''' = \frac{42(n-1)+1323(n^2-3n+2)+4214(n^3-6n^2+11n-6)+3675(n^4-10n^3+35n^2-50n+24)}{42.} +$$

$$+ \frac{1176(n^5-15n^4+85n^3-225n^2+274n-120)+147(n^6-21n^5+175n^4-735n^3+1624n^2-1764n+720)}{42.} +$$

$$+ \frac{6(n^7-28n^6+322n^5-1960n^4+6769n^3-13132n^2+13068n-5040.)}{42.} \text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrr}
S''' = \frac{1}{42}[6n^7 & - & 168n^6 & + & 1932n^5 & - & 11760n^4 & + & 40614n^3 & - & 78792n^2 & + & 78408n & - & 30240. \\
& + & 147n^6 & - & 3087n^5 & + & 25725n^4 & - & 108045n^3 & + & 238728n^2 & - & 259308n & + & 105840. \\
& & & + & 1176n^5 & - & 17640n^4 & + & 99960n^3 & - & 264600n^2 & + & 322224n & - & 141120. \\
& & & & & + & 3675n^4 & - & 36750n^3 & + & 128625n^2 & - & 183750n & + & 88200. \\
& & & & & & & + & 4214n^3 & - & 25284n^2 & + & 46354n & - & 25284. \\
& & & & & & & & & + & 1323n^2 & - & 3969n & + & 2646. \\
& & & & & & & & & & & + & 42n & - & 42.
\end{array}\right\}$$

oder endlich

$$S''' = \frac{6n^7-21n^6+21n^5-7n^3+n.}{42.}$$

u. s. f.

21. Die so gefundenen Summen der einzelnen Reihen der letzten Gleichungen des neunzehnten Artikels statt derselben eingeführt, geben daher

$$tang^2\alpha' + tang^2\alpha'' + tang^2\alpha''' + \ldots = \frac{tang^2\alpha}{(n-1)^2}\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{6.}\right);$$

$$tang^4\alpha' + tang^4\alpha'' + tang^4\alpha''' + \ldots = \frac{tang^4\alpha}{(n-1)^4}\left(\frac{6n^5-15n^4+10n^3-n}{30.}\right);$$

$$tang^6\alpha' + tang^6\alpha'' + tang^6\alpha''' + \ldots = \frac{tang^6\alpha}{(n-1)^6}\left(\frac{6n^7-21n^6+21n^5-7n^3+n}{42.}\right);$$

u. s. f.

Werden in diesen Gleichungen die angezeigten Divisionen wirklich ausgeführt, so gehen sie über in

$$tang^2\,\alpha' + tang^2\,\alpha'' + tang^2\,\alpha''' + \ldots = tang^2\,\alpha\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{6n^3} + \ldots\right)$$

$$tang^4\,\alpha' + tang^4\,\alpha'' + tang^4\,\alpha''' + \ldots = tang^4\,\alpha\left(\frac{n}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{3}{10n^3} + \ldots\right)$$

$$tang^6\,\alpha' + tang^6\,\alpha'' + tang^6\,\alpha''' + \ldots = tang^6\,\alpha\left(\frac{n}{7} + \frac{5}{14} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \ldots\right)$$

Diese für die Tangentenpotenzen - Reihen ermittelten Werthe in die letzte Gleichung des neunzehnten Artikels eingeführt, verwandeln dieselbe in

$$\begin{aligned} l = h &+ \frac{h}{2n}\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{6n^3} + \ldots\right) tang^2\,\alpha - \\ &- \frac{h}{2.4.n}\left(\frac{n}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{3}{10n^3} + \ldots\right) tang^4\,\alpha + \\ &+ \frac{3h}{2.4.6n}\left(\frac{n}{7} + \frac{5}{14} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \ldots\right) tang^6\,\alpha - \end{aligned}$$

u. s. f.

Diese Gleichung geht endlich nach gehöriger Reduktion, und indem man statt $tang\,\alpha$ den hiefür im Art. (15) gefundenen Werth einführt, über in

$$\begin{aligned} l = h &+ h\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12n} + \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^3} + \frac{1}{12n^4} + \ldots\right)\left(\frac{2f}{h}\right)^2 - \\ &- h\left(\frac{1}{40} + \frac{3}{80n} + \frac{1}{24n^2} + \frac{1}{24n^3} + \frac{3}{80n^4} + \ldots\right)\left(\frac{2f}{h}\right)^4 + \\ &+ h\left(\frac{1}{112} + \frac{5}{224n} + \frac{1}{32n^2} + \frac{1}{32n^3} + \frac{1}{48n^4} + \ldots\right)\left(\frac{2f}{h}\right)^6 - \end{aligned}$$

u. s. f.

Nun können in dieser letzten Gleichung von jeder der zwischen den Klammern befindlichen Reihen das zweite und alle darauf folgenden Glieder ganz weggelassen werden, ohne dass die Genauigkeit des Ausdruckes dadurch im Geringsten leidet. In der That gibt diese Gleichung die Länge von l um so genauer, je grösser man n annimmt, d. i. je kleiner die Kurventheilchen sind, durch deren Summirung l gefunden wurde. Je grösser aber n wird, desto kleiner wird das zweite und alle folgenden Glieder der letzten Reihen: sie erreichen endlich die Gränze von Null, wenn n so gross gedacht wird, dass die einzelnen Kurventheilchen nur mehr aus, dem Schlusse des Art (12) genügenden Kurvenelementen bestehen.

Setzen wir z. B. um die Länge eines Kettenbogens, dessen Spannweite $2h = 1200$ Fuss, dessen Pfeilhöhe $f = 80$ Fuss ist, möglichst genau zu erhalten, ohne es mit gar zu grossen Zahlen zu thun haben zu wollen,

$$n = 1000000,$$

so wird

$$l = 600 + 600\,(0{\cdot}16666667 + 0{\cdot}00000008)\left(\tfrac{4}{15}\right)^2 -$$
$$- 600\,(0{\cdot}02500000 + 0{\cdot}00000004)\left(\tfrac{4}{15}\right)^4 +$$
$$+ 600\,(0{\cdot}00892858 + 0{\cdot}00000002)\left(\tfrac{4}{15}\right)^6 -$$

u. s. f.

und wir ersehen, dass die zweiten Glieder jener Reihen auf die fragliche Länge von l einen zwischen den Klammern erst in der achten Dezimalstelle bemerklichen Einfluss haben; noch unbedeutender ist daher jene der nachfolgenden Glieder: und doch wurde für n eine Zahl angenommen, die von dem grösstdenkbaren Werthe, den man ihr geben sollte, offenbar noch allzuzehr entfernt ist.

Es ist sonach

$$l = h\left[1 + \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{2f}{h}\right)^2 - \tfrac{1}{40}\left(\tfrac{2f}{h}\right)^4 + \tfrac{1}{112}\left(\tfrac{2f}{h}\right)^6 - \ldots\right] \ldots (16)$$

oder

$$l = h\left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{f}{h}\right)^2 - \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{f}{h}\right)^4 + \tfrac{4}{7}\left(\tfrac{f}{h}\right)^6 - \ldots\right] \ldots (16)$$

der allgemeine Ausdruck, nach welchem die Länge der Krummen in jedem Falle berechnet werden kann, sobald deren Spannweite und Pfeilhöhe gegeben ist.

Bei der Anordnung desselben wird man wegen der gewöhnlich im Verhältnisse zur Spannweite sehr gering angeordnet werdenden Pfeilhöhe selten mehr, als die drei ersten Glieder der zwischen den Klammern enthaltenen Reihen beizubehalten nöthig haben, in den meisten Fällen werden sogar schon die zwei ersten Glieder allein zur Berechnung der Bogenlängen zureichen.

So ist in dem vorhin angeführten speziellen Beispiele bei der sehr bedeutenden, 1200 Fuss betragenden, und bisher noch bei keiner Brücke vorkommenden Spannweite

$$\tfrac{1}{6}\left(\tfrac{2f}{h}\right)^2 . 600 = 100.0{\cdot}0711111 = 7 \cdot 11111 \text{ Fuss}$$

$$\tfrac{1}{40}\left(\tfrac{2f}{h}\right)^4 . 600 = 150.\overline{0{\cdot}0711111}^2 = 0 \cdot 07585 \text{ Fuss}$$

$$\tfrac{1}{112}\left(\tfrac{2f}{h}\right)^6 . 600 = 5 \cdot 35714.\overline{0{\cdot}0711111}^4 = 0 \cdot 00192 \text{ Fuss}$$

daher mit Vernachlässigung des vierten Gliedes der letzten Reihen die ganze Bogenlänge $2\,l$ um 0·00384 Fuss oder 0·045 Zoll zu kurz erhalten würde, was bei der ganzen, an 1214 Fuss betragenden Länge dieses Bogens offenbar nicht die geringste Beachtung verdient, sofern die ermittelte Länge nur dazu dienen soll, um hiernach die Längen zu bestimmen, welche den einzelnen Kettengliedern gegeben werden sollen.

22. Endlich bedarf es keines besondern Beweises, dass um die Länge s irgend eines Theiles OM Fig. 10. der Krummen zu finden, welcher vom Scheitel O bis zu einem Punkte M reicht, dessen Koordinaten x und y sind, man in den Gleichungen (16) des vorigen Art. blos diese Koordinaten statt h und f einzuführen haben wird, indem man, sobald man sich den Theil MB und einen symetrisch liegenden in der andern Kurvenhälfte weggenommen denkt, es alsdann mit einer Parabel zu thun hat, deren Spannweite $2x$, und deren Pfeilhöhe y ist: in der That folgt für dieses Kurvenstück OM, wenn der Winkel, welchen die in M gezogene Tangente mit dem Horizonte einschliesst, wie bisher, mit φ bezeichnet wird, aus der Gleichung (10) Art (13) auch

$$tang\ \varphi = \frac{2y}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

und es sind, durch Substitution in die Gleichungen (16) sich ergebend:

$$s = x\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{2y}{x}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{2y}{x}\right)^4 + \frac{1}{112}\left(\frac{2y}{x}\right)^6 - \ldots .\right]$$

oder

$$s = x\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^4 + \frac{4}{7}\left(\frac{y}{x}\right)^6 - \ldots .\right]$$

oder endlich, indem man statt y den dieser Ordinate nach der Gleichung (12) Art. (13) ankommenden Werth einführt:

$$s = x\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^4 + \frac{1}{112}\left(\frac{2fx}{h^2}\right)^6 - \ldots\right] \ldots (18)$$

oder

$$s = x\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{fx}{h^2}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{fx}{h^2}\right)^4 + \frac{4}{7}\left(\frac{fx}{h^2}\right)^6 - \ldots\right] \ldots (18)$$

die Gleichungen, nach welchen die Länge des Bogens OM, welcher vom Scheitel O bis zu jenem Punkte M reicht, dessen Koordinaten x und y sind, berechnet werden kann.

23. Aus den Gleichungen (16) Art (21) lässt sich nunmehr, indem man das bekannte Verfahren des Umkehrens der Reihen anwendet, auch ein Ausdruck ableiten, nach welchem die Pfeilhöhe berechnet werden kann, wenn die Bogenlänge und die Spannweite einer Hängebrücke bekannt ist.

Bringt man, um hiezu zu gelangen, in der letztern jener Gleichungen die Potenzen des Verhältnisses $\left(\frac{f}{h}\right)$ auf die eine Seite des Gleichheitszeichens, so erhält man

$$\frac{l-h}{h} = \frac{2}{3}\left(\frac{f}{h}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{f}{h}\right)^4 + \frac{4}{7}\left(\frac{f}{h}\right)^6 \ldots \ldots$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$\frac{l-h}{h} = z \text{ und } \left(\frac{f}{h}\right)^2 = u,$$

so kann man statt vorliegendem Ausdrucke schreiben

$$z = \frac{2}{3}u - \frac{2}{5}u^2 + \frac{4}{7}u^3 - \ldots ;$$

durch Umkehrung desselben kann aber nur

$$u = az + bz^2 + cz^3 + \ldots$$

gefunden werden, wo a, b, c, ... noch zu bestimmende Koeflizienten bezeichnen.

Entwickelt man daher, um diese zu finden, auch noch die auf einander folgenden Potenzen des letzten Ausdruckes, so erhält man

$$u^2 = a^2z^2 + 2abz^3 + (b^2 + 2ac)\ z^4 + \ .\ .$$
$$u^3 = a^3z^3 + 3a^2bz^4 + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$u^4 = a^4z^4 + .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Diese Werthe in obige, für z aufgestellte Gleichung statt u, u^2, u^3, u^4 . . . . eingeführt, verwandeln dieselbe in

$$z = \tfrac{2}{3}\ az - \tfrac{1}{15}(6a^2 - 10b)\ z^2 + \tfrac{1}{105}(60a^3 - 84ab + 70c)\ z^3 - \ldots$$

und weil in jeder Funktion dieser Art die Koeffizienten, welche zu einerlei Potenzen der Veränderlichen gehören, einander beiderseits gleich sind, so ist nothwendig

$$\frac{2a}{3} = 1.$$

mithin der Koeffizient

$$a = \tfrac{3}{2}\ .$$

Ferner ist

$$-\tfrac{1}{15}(6a^2 - 10b) = o;$$

also der Koeffizient

$$b = \frac{3a^2}{5.}$$

substituirt man nun hierin statt a den vorhin gefundenen Werth, so erhält man endlich

$$b = \tfrac{27}{20}\ .$$

So ist weiters

$$\tfrac{1}{105}(60a^3 - 84ab + 70c) = o.$$

also der Koeffizient

$$c = \frac{84ab - 60a^3}{70.}$$

woraus durch Einführung der bisher für a und b gefundenen Werthe

$$c = -\tfrac{81}{175}$$

gefunden wird.

u. s. f.

Es ist somit

$$\left(\frac{f}{h}\right)^2 = \tfrac{3}{2}\left(\frac{l-h}{h}\right) + \tfrac{27}{20}\left(\frac{l-h}{h}\right)^2 - \tfrac{81}{175}\left(\frac{l-h}{h}\right)^3 + \ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

daher die fragliche Pfeilhöhe

$$f = h\sqrt{\left[\tfrac{3}{2}\left(\frac{l-h}{h}\right) + \tfrac{27}{20}\left(\frac{l-h}{h}\right)^2 - \tfrac{81}{175}\left(\frac{l-h}{h}\right)^3 + \ .\ .\ \right]} \ldots (19)$$

24. Durch ein ähnliches Verfahren, wie wir es angewendet haben, um eine Gleichung zu erhalten, nach welcher die einer gegebenen Kettenlänge und Spannweite zugehörige Pfeilhöhe bestimmt werden kann, werden wir jetzt noch eine Gleichung suchen, die man zur Berechnung der, den einzelnen Punkten eines Kettenbogens entsprechenden vertikalen Abstände von einer durch den Scheitel gehenden Horizontalen wird benützen können, wenn die, der Kettenlänge nach gemessene Entfernung dieser Punkte vom Scheitel des Kettenbogens, die Spannweite des letztern, und seine Pfeilhöhe bekannt sind.

Führen wir zu diesem Ende vorerst in der ersten der Reihengleichungen des Art. (22) statt x den dieser Abscisse nach der Gleichung (12) Art. (13) zukommenden Werth

$$x = h\sqrt{\frac{y}{f}}$$

ein: sie geht alsdann nach gehöriger Reduktion über in

$$s = \frac{h}{\sqrt{f}} \cdot \sqrt{y} + \frac{2\sqrt{f}}{3h} \cdot y\sqrt{y} - \frac{2f\sqrt{f}}{5h^3} \cdot y^2\sqrt{y} + \frac{4f^2\sqrt{f}}{7h^5} \cdot y^3\sqrt{y} - \ldots$$

oder in

$$s = \frac{h}{\sqrt{f}} \cdot y^{\frac{1}{2}} + \frac{2\sqrt{f}}{3h} \cdot y^{\frac{3}{2}} - \frac{2f\sqrt{f}}{5h^3} \cdot y^{\frac{5}{2}} + \frac{4f^2\sqrt{f}}{7h^5} \cdot y^{\frac{7}{2}} - \ldots$$

Setzen wir nun der Kürze wegen die Buchstaben $A, B, C, \ldots$ statt der Koeffizienten der vorliegenden Reihe, so verwandeln wir dieselbe in

$$s = Ay^{\frac{1}{2}} + By^{\frac{3}{2}} - Cy^{\frac{5}{2}} + Dy^{\frac{7}{2}} - \ldots$$

und es kommt jetzt nur noch darauf an, diese Reihe umzukehren, um y durch die Potenzen von s ausgedrückt zu erhalten.

Nun ist aus der Lehre von der Umkehrung der Reihen bekannt, dass die Potenzen der Veränderlichen in der, der vorliegenden zugehörigen umgekehrten Reihe in den auf einander folgenden geraden Zahlen bestehen, und es kann daher durch das Umkehren jener Reihe nur

$$y = as^2 + bs^4 + cs^6 + ds^8 + \ldots$$

gefunden werden, wo wieder $a, b, c, d \ldots$ noch zu bestimmende Koeffizienten sind.

Diese zu ermitteln finden wir, indem wir die geraden Potenzen von dem letztern, für s aufgestellten Ausdrucke entwickeln

$$s^2 = A^2y + 2ABy^2 + (B^2 - 2AC)\,y^3 + 2\,(AD - BC)\,y^4 + \ldots$$
$$s^4 = A^4y^2 + 4A^3By^3 + (6A^2B^2 - 4A^3C)\,y^4 + \ldots$$
$$s^6 = A^6y^3 + 6A^5By^4 + \ldots$$
$$s^8 = A^8y^4 + \ldots$$

Diese Werthe in die letzte Gleichung eingeführt, geben

$$y = aA^2y + (2aAB + bA^4)y^2, + (aB^2 - 2aAC + 4bA^3B + cA^6)y^3 +$$
$$+ (2aAD - 2aBC + 6bA^2B^2 - 4bA^4C + 6CA^5B + dA^8)\,y^4 + \ldots$$

Es ist also in Folge des Satzes, dass die Koeffizienten der gleichnamigen Potenzen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich sein müssen

$$aA^2 = 1.$$

also

$$a = \frac{1}{A^2}$$

und weil

$$A = \frac{h}{\sqrt{f}}, \text{ mithin } A^2 = \frac{h^2}{f}$$

ist, so erhalten wir endlich

$$a = \frac{f}{h^2}$$

Dagegen haben wir

$$2aAB + bA^4 = 0$$

also

$$b = -\frac{2aAB}{A^4}$$

und weil

$$a = \frac{f}{h^2},\quad A = \frac{h}{\sqrt{f}},\quad B = \frac{2\sqrt{f}}{3h},\quad A^4 = \frac{h^4}{f^2}$$

ist, so ergibt sich endlich

$$b = -\frac{4f^2}{3h^4}.$$

Und so erhalten wir

$$aB^2 - 2aAC + 4bA^3B + cA^6 = o$$

woraus

$$c = \frac{2aAC - aB^2 - 4bA^3B}{A^6},$$

oder, indem man statt a, b, A, B und C die, diesen Grössen nach dem Bisherigen zukommenden Werthe einführt,

$$c = \frac{176f^3}{45h^{10}}$$

gefunden wird.

Ferner folgt aus der Gleichung

$$2aAD - 2aBC + 6bA^2B^2 - 4bA^3C + 6cA^5B + dA^8 = o$$

$$d = \frac{2aBC - 2aAD + 4bA^3C - 6bA^3B^2 - 6cA^5B}{A^8}$$

und nach gehöriger Substitution und Reduktion

$$d = -\frac{4672f^4}{315h^{14}}$$

u. s. f.

Substituiren wir die, für die Koeffizienten a, b, c . . . gefundenen Werthe in die für y aufgestellte letzte Gleichung, so erhalten wir endlich

$$y = \frac{fs^2}{h^2} - \frac{4f^2s^4}{3h^6} + \frac{176f^3s^6}{45h^{10}} - \frac{4672f^4s^8}{315h^{14}} + \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

oder auch

$$y = \frac{fs^2}{h^2}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{f^2s^2}{h^4}\right) + \frac{176}{45}\left(\frac{f^2s^2}{h^4}\right)^2 - \frac{4672}{315}\left(\frac{f^2s^2}{h^4}\right)^3 + \ldots\right] \ldots (20)$$

Mittelst dieser Gleichung ist man nunmehr im Stande für Kettenbrücken, deren Kettenglieder gleich lang gemacht werden sollen, den vertikalen Abstand eines in jeder beliebigen Entfernung vom Scheitel der Krummen liegenden Punktes derselben von einer durch diesen Scheitel gelegt gedachten horizontalen Geraden, und somit auch die in diesem Punkte erforderliche Hängestangenlänge zu berechnen, sobald die Entfernung dieses Punktes vom Scheitel der Krummen der Bogenlänge nach bekannt ist.

25. Ist nun nach der letzten Gleichung für eine gegebene Bogenlänge b die zugehörige Ordinate y zu suchen, so erhalten wir durch Substitution

$$y' = \frac{fb^2}{h^2}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right) + \frac{176}{45}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right)^2 - \frac{4672}{315}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right)^3 + \ldots\ldots\right]$$

oder auch

$$y' = A\,(1 - B + C - D + \ldots\ldots\ldots)$$

wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{fb^2}{h^2} = A$$

$$\frac{4}{3}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right) = B.$$

$$\frac{176}{45}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right) = C$$

$$\frac{4672}{315}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right) = D$$

u. s. f. setzen.

Geht nun in obiger Gleichung s in $2b$ über, so erhalten wir für das entsprechende

$$y'' = \frac{4fb^2}{h^2}\left[1 - \frac{4.4}{3}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right) + \frac{16.176}{45}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right)^2 - \frac{64.4672}{315}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right)^3 + \ldots\right]$$

oder auch

$$y'' = 4A\ (1 - 4B + 16C - 64D + \ldots)$$

In einer Entfernung $3b$ vom Scheitel der Krummen aber ist die zugehörige Ordinate:

$$y''' = \frac{9fb^2}{h^2}\left(1 - \frac{9.4}{3}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right) + \frac{81.176}{45}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right)^2 - \frac{729.4672}{315}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right)^3 + \ldots\right]$$

oder auch

$$y''' = 9A\ (1 - 9B + 81C - 729D + \ldots)$$

Lassen wir ferner s in $4b$ übergehen, so werden wir für den vertikalen Abstand des Endepunktes dieses Bogens von einer durch den Scheitel der Krummen gezogenen Horizontalen

$$y^{iv} = \frac{16fb^2}{h^2}\left[1 - \frac{16.4}{3}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right) + \frac{256.176}{45}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right)^2 - \frac{4096.4672}{315}\left(\frac{f^2b^2}{h^4}\right)^3 + \ldots\right]$$

oder auch

$$y^{iv} = 16A\ (1 - 16B + 256C - 4096D + \ldots)$$

finden.

Hieraus ist leicht abzunehmen, dass man für die n^{te} Ordinate

$$y^n = n^2A\ (1 - n^2B + n^4C - n^6D + \ldots)$$

erhalten wird, daher, sobald man die erste Ordinate mit der erforderlichen Genauigkeit berechnet hat, jede folgende aus dieser mittelst der letztern Formel leicht abzuleiten ist.

Nehmen wir jetzt, um zu sehen, welche Konvergenz die Gleichungen (20) gewähren, an, es sei für $s = h$, und $h = 6f$, was beides selten der Fall sein wird, die zugehörige Ordinate zu suchen. Bei solcher Annahme ist

$$y = f\left(1 - \frac{4}{3.36} + \frac{176}{45\ .\ 1296} - \frac{4672}{315\ .\ 46656} + \ldots\right)$$

$$= f\ (1 - 0.03704 + 0.00302 - 0.00032 + \ldots)$$

Nun gibt aber selbst für $f = 80$ Fuss, was sich nur selten ergeben wird, das Produkt aus dieser Pfeilhöhe in das vierte Glied der Reihe nur mehr, 0.0256 Fuss, oder 0.3072 Zoll, daher dieses für die bei Ketten-

brücken vorkommenden Fälle immer, das dritte Glied aber ebenfalls wird vernachlässigt werden können, so lange s bedeutend kleiner als h, oder aber f nicht grösser als 30 Fuss ist.

26. Wir wollen uns jetzt noch mit der Untersuchung beschäftigen, welche Beziehungen zwischen der Pfeilhöhe und Spannweite alsdann statt finden, wenn die Aufhängepunkte A und B, *Fig.* 11 einer Kettenbrücke nicht gleich hoch liegen. In einem solchen Falle liegt der Scheitel der Krummen AOB offenbar nicht in der Mitte ihrer Länge: und es handelt sich darum, wenn die Spannweite AE, der Höhenunterschied EB der Punkte A und B, und der Höhenunterschied FO der Punkte F und O, also auch die Pfeilhöhen der Bogen AO und OB bedingt sind, den horizontalen Abstand des Scheitels O von den Punkten A und B, oder AC und FB zu bestimmen.

Setzen wir daher

$$AE = d,\ AC = h,\ FB = h',\ \text{also}\ h' = d - h,\ \text{und}$$
$$CF = b,\ CO = f,\ FO = f',\ \text{also}\ f' = f - b$$

so sind, wenn wir O als bereits bekannt, und wie bisher als Koordinaten-Ursprung, ferner eine durch O gehende Horizontale als Abscissenachse annehmen, h' uud f' die Koordinaten des Punktes B, in einer Parabel, deren Parameter nach Art. (14)

$$\frac{AC^2}{CO} = \frac{h^2}{f}$$

ist; man darf sich, um diess einzusehen, nur den Bogen OB bis zu dem, mit A gleich hoch liegenden, von C eben so weit, wie A von C entferntem Punkte D ergänzt, und nach geschehener Fixirung des Punktes B den Theil BD der Krummen wieder weggenommen denken.

Substituiren wir daher diese Koordinaten in die allgemeine Gleichung

$$y = \frac{fx^2}{h^2}$$

dieser Parabel, so erhalten wir für die Beziehungen, welche zwischen f', h', f und h stattfinden, die Gleichung

$$f' = \frac{fh'^2}{h^2}$$

wofür wir, da

$$h' = d - h,\ \text{und}\ h = d - h'$$

ist, auch

$$f' = \frac{fh'^2}{(d-h')^2} \quad \text{oder} \quad f' = \frac{f(d-h)^2}{h^2}$$

schreiben können. Aus diesen Gleichungen erhalten wir, da d, f und f' gegebene Grössen sind,

$$h' = \left[\frac{-f' + \sqrt{ff'}}{f-f'}\right] d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und

$$h = \left[\frac{f - \sqrt{ff'}}{f - f'}\right] d, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und man ist nunmehr im Stande, indem man in den Gleichungen (16) einmal die der gegebenen Pfeilhöhe f' entsprechende halbe Spannweite h', und dann die, der gegebenen Pfeilhöhe f zugehörige halbe Spannweite h einführt, die Länge beider Bogen BO und AO, und somit auch die Länge des ganzen Bogens AOB zu ermitteln.

Endlich unterliegt, nachdem die Lage des Scheitels der Krummen gefunden worden, die Berechnung der erforderlichen Hängestangenlängen auch keinem Anstande mehr; sie wird nämlich nach den Gleichungen des vorigen Art., indem man darin statt f den gegebenen, und statt h den nach der letzten Gleichung dieses Art. hiefür sich ergebenden Werth einführt, zu geschehen haben.

Eben diese Werthe werden endlich zu den, in den letzten vier Art. des ersten Abschnittes besprochenen Berechnungen und Konstruktionen zu Grunde zu legen sein.

Dritter Abschnitt.

Grösse des erforderlichen Kettenquerschnittes, und Grenze der ausführbaren Kettenspannweiten.

---

27. Aus den Gleichungen (1) bis (12) des eilften und dreizehnten Artikels lässt sich ausser dem bereits bekannten P und V oder den vertikalen Seitenkräften der Spannungen T und R auch die Grösse dieser Spannungen selbst, und jene ihrer horizontalen Seitenkraft Q ableiten.

Es folgt nämlich aus der Gleichung (6) Art. (11.)

$$Q = \frac{P}{tang\ \alpha}$$

welcher Ausdruck, wenn darin statt P die dieser Kraft nach der Gleichung (3) und statt $tang\ \alpha$ der dieser Tangente nach der Gleichung (15) Art. (15) entsprechende Werth eingeführt wird, übergeht in

$$Q = \frac{ph^2}{2f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Auf gleiche Weise ergibt sich aus der Gleichung (5) Art. (11)

$$Q = \frac{V}{tang\ \varphi};$$

wofür man, indem man statt V den dieser Grösse nach der Gleichung 2) und statt $tang\ \varphi$ den dieser Tangente nach der Gleichung (17) Art. (22) zukommenden Werth substituirt, auch schreiben kann

$$Q = \frac{px^2}{2y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Nun ist aber die Mittelkraft R aus den zwei rechtwinklicht gegen einander auf den Punkt M *Fig.* (5) Art. (10) wirkenden Kräften V und Q allgemein durch

$$R = \sqrt{V^2 + Q^2}$$

und jene T der auf den Punkt A vertikal und horizontal wirkenden Kräfte P und Q durch

$$T = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

gegeben. Setzt man daher in diesen Gleichungen statt V, P und Q die hiefür durch die Gleichungen (2) und (3) Art. (11), und die durch die Gleichungen

(22) und (23) des vorliegenden Artikels bedingten Werthe, so ergibt sich, nachdem V, P und Q die Seitenkräfte der in den Punkten M und A statt findenden tangentialen Spannungen bezeichnen, und also deren Mittelkräfte diese tangentialen Spannungen selbst angeben, als die, die tangentiale Spannung in einem beliebigen Punkte M, dessen Koordinaten x und y sind, bestimmende Gleichung

$$R = \frac{px}{2y}\sqrt{x^2 + 4y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

während jene tangentiale Spannung, welche in den Aufhängepunkten Statt findet, gegeben sein wird durch

$$T = \frac{ph}{2f}\sqrt{h^2 + 4f^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

28. Die letzte Gleichung macht es uns möglich eine Formel zu finden, nach welcher der Querschnitt wird berechnet werden können, welcher bei Hängebrücken den Ketten gegeben werden muss, damit sie der Belastung, welche sie zu tragen haben werden, ohne Gefahr ausgesetzt werden können. Diese Gleichung gibt nämlich die grösste aller Spannungen an, welche sich durch die Einwirkung der für die laufende Einheit der Spannweite entfallende Last p in dem tragenden Bogen erzeugt: jene, so in den Aufhängepunkten Statt findet. Von hier gegen den Scheitel hin, nimmt die Spannung der Ketten immerfort ab, bis sie endlich im letztern Punkte in die, durch die Gleichung (22) gegebene horizontale Spannung übergeht. Ist daher der Querschnitt der Ketten gross genug, um in einem gegebenen Falle dieselben, ohne dass sie der Gefahr des Zerreissens ausgesetzt sind, jener Spannung unterliegen lassen zu können, welche für den gegebenen Fall nach der Gleichung (25) durch Berechnung gefunden wird, so ist die Festigkeit der Ketten, wenn sich ihr Querschnitt anders, wie diess gewöhnlich geschieht, der ganzen Kettenlänge nach gleich bleibt, auch der ganzen Länge nach offenbar hinreichend gesichert.

Vorläufig ersehen wir, dass die Kenntniss derjenigen Spannung, welcher eine Stange überhaupt mit Sicherheit ausgesetzt werden darf, die bei einem gegebenen Querschnitte aus demselben Materiale, wie die Ketten, besteht, für den vorliegenden Zweck unerlässlich ist: diese Spannung wird offenbar verschieden sein, je nachdem die einzelnen Kettenglieder aus Holz, Drathseilen, Eisen, Stahl u. s. w. bestehen. Auch leuchtet ein, dass die Kenntniss der absoluten Festigkeit, d. i. die Kenntniss derjenigen Kraft, welche eine Stange von gegebenem Materiale und Querschnitte zu zerreissen vermag, hiezu allein nicht zureichend ist, indem die Spannung der Kettenglieder keineswegs bis zu dieser Gränze getrieben werden darf, ohne vorhinein gewiss sein zu können, dass mit dem Eintreten derselben das Reissen der Ketten nothwendig nur zu bald erfolgen werde, während unter derjenigen Spannung, welcher die Glieder einer Kettenbrücke mit Sicherheit unterzogen werden dürften, blos jene Kraft verstanden sein will, mit welcher sie nach der Richtung ihrer Länge gezogen werden können, ohne dass sie dadurch nicht nur nicht alsogleich zerrissen zu werden in Gefahr stehen, sondern ohne dass hiedurch eine ihre Festigkeit nach und nach abnehmen

machende Veränderung ihrer Strunktur weder bei wiederholten, noch bei ununterbrochenem Einwirken jener Kraft bewirkt werde.

Es haben nämlich die über die absolute sowohl, als über die relative, rückwirkende und detrusive Festigkeit verschiedener Körper angestellten Versuche gezeigt, dass eine auch geringere als jene Kraft, welche zur gänzlichen Trennung des Zusammenhanges ihrer einzelnen Theilchen erforderlich ist, diesen Zusammenhang bereits in der Art zu stören vermag, dass die Körper nach aufgehobener Einwirkung jener kleinern Kraft ihre ursprüngliche Gestalt nicht mehr ganz annehmen, sondern die durch das Einwirken jener Kraft veränderte, und sei es verlängerte, gebogene oder zusammen gedrückte Form zum Theil beibehalten, in Folge dessen bei dem wiederholten Einwirken derselben Kraft, wenn sie eine gewisse Gränze erreicht, die bleibende Veränderung der Körper immer grösser, und ihr gänzlicher Zusammenhang endlich mit einer stets geringern Kraft aufgehoben wird, als sie durch die absolute, relative, rückwirkende oder detrusive Festigkeit bedingt gewesen wäre.

Hieraus lässt sich abnehmen, dass, je geringer die bleibenden Veränderungen sind, welche irgend eine Kraft in irgend einem Körper zurücklässt, desto weniger für seine Festigkeit zu besorgen stehe, dass dagegen seine Festigkeit um so mehr gefährdet sei, in einem je grössern Verhältnisse die bleibenden Veränderungen zunehmen.

Vergleicht man die über die Dehnbarkeit und Beugbarkeit der Körper bisher angestellten Versuche mit den durch die Erfahrung bewährten grössten Kräften, deren Einwirkung man verschiedene Körper auf verschiedene Weise aussetzen darf, ohne ihre dauernde Festigkeit zu gefährden, so liegen diese Kräfte im Allgemeinen jener Kraft sehr nahe, bei welcher die Verlängerungen oder Beugungen den Kräften, durch die sie bewirkt werden, proportional zu sein aufhören, und die einzelnen Versuche zeigen, dass, so lange jene Veränderungen den Kräften proportional sind, das wiederholte Einwirken derselben Kraft die bleibende Veränderung auch immer weniger wachsen mache, und endlich eine neuerliche zu bewirken, ganz aufhöre: eine Forderung, der vor allem andern Genüge geschehen muss, um über die dauernde Festigkeit der Körper ganz beruhigt sein zu können.

Um also über die dauernde Festigkeit der Ketten einer Hängebrücke gesichert sein zu können, dürfen, dem Gesagten entsprechend, ihre Glieder unter keinerlei Umständen einer Spannung ausgesetzt werden, welche, zu wiederholtenmalen eintretend, dieselben immer mehr und mehr verlängert: im Gegentheile darf, da zum Probiren der einzelnen Glieder, der Sicherheit wegen, immer eine noch etwas grössere Kraft, als die seiner Zeit zu gewärtigende grösste Spannung angewendet wird, nur hiebei, keineswegs aber bei den gelegentlichen zufälligen Bahnbelastungen nach Entfernung derselben eine bleibende Verlängerung der Ketten zurückbleiben, wenn nicht schon die zu diesem Probiren angewandte Kraft die natürliche Elastizität des Materials gefährdend gestört hat.

Indem wir nun die grösste Spannung, welcher die Ketten einer Hängebrücke mit Sicherheit ausgesetzt werden dürfen, um sie von ihrer absoluten

Festigkeit zu unterscheiden, ihre absolute Elastizität nennen wollen, werden wir uns hier damit begnügen, beide bei Einem Quadratzolle Querschnitt für verschiedene, zum Bau der Hängebrücken verwendbare Materialien so anzugeben, wie sich erstere durch Versuche und Erfahrungen, und letztere durch Vergleichung der über die Dehnbarkeit und Beugbarkeit der Körper erhaltenen Resultate mit ihrer durch die Erfahrung mehr oder weniger bewährten ausdauernden Festigkeit ergibt, ohne sie aus Mangel an genügend genauen Versuchen und zureichenden Erfahrungen als unumstössliche Gränzen hinstellen zu wollen. Bezeichnen wir sofort mit F die absolute Festigkeit der Körper, und mit E ihre absolute Elastizität, so ist theils durch Versuche, theils durch Erfahrungen begründet für

Stahl	$F =$	100000	bis	116000 Pfd.;	$E =$	35000	bis	40000 Pfd.
Drahtseile	$F =$	68000	bis	90000 Pfd.;	$E =$	20000	bis	24000 Pfd.
Schmiedeisen	$F =$	48000	bis	57000 Pfd.;	$E =$	16000	bis	19000 Pfd.
Gusseisen	$F =$	15000	bis	20000 Pfd.;	$E =$	4000	bis	6000 Pfd.
Kiefernholz	$F =$	10000	bis	15000 Pfd.;	$E =$	1000	bis	1500 Pfd.
Tannenholz	$F =$	9000	bis	13000 Pfd.;	$E =$	900	bis	1300 Pfd.
Fichtenholz	$F =$	8000	bis	11000 Pfd.;	$E =$	800	bis	1100 Pfd.
Hanfseile	$F =$	7000	bis	9000 Pfd.;	$E =$	600	bis	800 Pfd.

29. Nunmehr wollen wir, um die Grösse Ω jenes Querschnittes zu finden, welcher den Gliedern einer Kettenbrücke gegeben werden muss, damit sie der Spannung, welcher sie bei der grösstmöglichen Belastung der Brückenbahn ausgesetzt sein werden, mit Sicherheit zu widerstehen vermögen, die absolute Elastizität des Materials, aus dem die Ketten hergestellt werden sollen, allgemein mit Σ bezeichnen, und zwar wollen wir, da es am angemessensten ist, alle Abmessungen, welche Gegenstand der vorliegenden Schrift sind, bei speziellen Berechnungen in Schuhen auszudrücken, unter Σ die absolute Elastizität des Materials bei einem Querschnitte von einem Quadratschuh verstanden haben.

Wird nun jener Theil, welcher von dem Gesammtgewichte der Bahn, aller Hängestangen und der grösstmöglichen zufälligen Belastung der erstern für die laufende Einheit, also für den Kurrentfuss der Spannweite entfällt, $= \tilde{\omega}$, das Gewicht der körperlichen Einheit des Materials, aus dem die Ketten bestehen, also jenes eines Kubikfusses $= \sigma$; endlich wie bisher die Spannweite $= 2h$, die Pfeilhöhe $= f$ gesetzt, so wird, indem das Gewicht der Ketten genau genug durch das Produkt aus der Spannweite in den Querschnitt und in das Gewicht der körperlichen Einheit, oder genau genug durch

$$2h\,\Omega\,\sigma$$

ausgedrückt wird, der hievon für die laufende Einheit der Spannweite entfallende Antheil $= \Omega\,\sigma$ sein.

Es ist also der, bei grösstmöglicher Belastung der Brückenbahn, hievon und von allen frei hängenden Theilen der Brücke für die laufende Einheit der Spannweite sich ergebende Gewichtstheil, den wir mit p bezeichnen wollen, gegeben durch

$$p = \tilde{\omega} + \Omega\,\sigma.$$

30. Wird der letzt ermittelte Werth statt p in der Gleichung (25) Art.

(27) eingeführt, so erhält man für die Spannung, welche in den Aufhängepunkten oder beziehungsweise in den, diesen Stellen zunächst liegenden Kettengliedern durch das beständige frei hängende Gewicht der Ketten, Hängestangen und der Brückenbahn, dann durch die grösstmögliche zufällige Belastung der letztern bewirkt wird, den Ausdruck

$$T = \frac{(\tilde{\omega} + \sigma\,\Omega)\,h}{2f}\sqrt{h^2 + 4f^2}$$

Die grösste Spannung aber, welcher die Kettenglieder unterzogen werden dürfen, ist nach dem bisherigen gegeben durch die Gleichung

$$T = \Omega\,\Sigma.$$

Nun müssen bei, sowohl in technischer als in ökonomischer Beziehung, zweckmässiger Anordnung beide Spannungen einander gleich, also

$$\frac{(\tilde{\omega} + \Omega\,\sigma)\,h}{2f}\sqrt{h^2 + 4f^2} = \Omega\,\Sigma$$

sein: hieraus wird denn

$$\Omega\,(2f\Sigma - h\tilde{\omega}\sqrt{h^2 + 4f^2}) = \tilde{\omega}\,h\sqrt{h^2 + 4f^2}.$$

und somit der fragliche Querschnitt oder

$$\Omega = \frac{\tilde{\omega}\,h\sqrt{h^2 + 4f^2}}{2f\Sigma - \sigma\,h\sqrt{h^2 + 4f^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\

mithin

$$h = f\sqrt{2\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{\Omega\,\Sigma}{f(\tilde{\omega}+\Omega\sigma)}\right)^2}\right]} \quad \ldots\ldots (27)$$

gefunden wird, eine Gleichung, welche die Grenze angibt, bis zu der man bei bedingtem Gewichte der Bahn und zufälligen Belastung, dann bei gegebener Pfeilhöhe, absoluter Elastizität des Materials, aus dem die Ketten bestehen, absolutem Gewichte ihrer körperlichen Einheit und bedingtem Querschnitte die Spannweite des Bogens treiben kann.

Auch ergibt sich aus der Eingangs dieses Art. befindlichen Gleichung weiter

$$4f^2\left[\left(\frac{\Omega\,\Sigma}{\tilde{\omega}+\Omega\,\sigma}\right)^2 - h^2\right] = h^2$$

oder

$$f^2\left[\frac{4\,\Omega^2\,\Sigma^2 - 4h^2\,(\tilde{\omega}+\Omega\,\sigma)^2}{(\tilde{\omega}+\Omega\,\sigma)^2}\right] = h^2$$

hieraus wird

$$f = \frac{h^2\,(\tilde{\omega}+\Omega\,\sigma)}{2\sqrt{\Omega^2\Sigma^2 - h^2\,(\tilde{\omega}+\Omega\,\sigma)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (28)$$

gefunden: diese Gleichung bestimmt somit, wie gross die Pfeilhöhe gemacht werden müsste, wenn die Spannweite, die absolute Elastizität des Materials, aus dem die Ketten bestehen sollen, das Gewicht der körperlichen Einheit dieses Materials, der Querschnitt der Ketten und das Gewicht der Bahn und zufälligen Belastung bedingt wäre.

32. Wollte man bei der Ableitung des Ausdruckes, nach welchem die Berechnung des erforderlichen Kettenquerschnittes zu geschehen hat, auch den Unterschied zwischen der Länge der Ketten und ihrer Spannweite berücksichtigen, so hätte die Ableitung ganz auf dem, im 30. Art., eingeschlagenen Wege zu geschehen, nur wäre dabei, wenn wir mit l die halbe Kettenlänge bezeichnen, wie leicht einzusehen,

$$p = \tilde{\omega} + \frac{\Omega\,l\,\sigma}{h}$$

zu setzen. Hiedurch wird

$$T = \frac{(\tilde{\omega}\,h + \Omega\,l\,\sigma)}{2f}\sqrt{h^2 + 4f^2}.$$

erhalten, und es muss für den Zustand des gesicherten Gleichgewichtes zwischen der Spannung der Ketten und ihrem Querschnitte der Gleichung

$$\frac{(\tilde{\omega}\,h + \Omega\,l\,\sigma)}{2f}\sqrt{h^2 + 4f^2} = \Omega\,\Sigma$$

Genüge geschehen; hieraus erhält man

$$\Omega\,(2f\Sigma - \sigma\,l\sqrt{h^2 + 4f^2}) = \tilde{\omega}\,h\sqrt{h^2 + 4f^2}.$$

also

$$\Omega = \frac{\tilde{\omega}\,h\sqrt{h^2 + 4f^2}}{2f\,\Sigma - \sigma\,l\sqrt{h^2 + 4f^2}}$$

oder auch

$$\Omega = \frac{3h^3\,\tilde{\omega}\,\sqrt{h^2+4f^2}}{6fh\,\Sigma - (3h^2+2f^2)\sigma\sqrt{h^2+4f^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

indem nach Art. (21) die halbe Kettenlänge genau genug durch

$$l = h + \frac{2f^2}{3h}$$

gegeben ist, dieser Werth aber statt l in der erstern der zwei vorhergehenden Gleichungen eingeführt, diese in die letztere verwandelt.

33. Um uns darüber Rechenschaft zu geben, welchen Einfluss der zwischen der Kettenlänge und Spannweite statt findende, und bei der Ableitung der Gleichung (26) vernachlässigte Längenunterschied auf die Grösse des Querschnittes und die Festigkeit der Ketten hat, wollen wir diesen Querschnitt nach beiden Formeln für eine Brücke berechnen, deren Spannweite = 1200 Fuss, und deren Pfeilhöhe = 80 Fuss ist, indem wir für dieselbe das Gewicht der Bahn, und Hängestangen für den laufenden Fuss der Spannweite auf 1000 Pfund und das der grösstmöglichen zufälligen Belastung auf 2000 Pfund anschlagen, also $\tilde{\omega} = 3000$ Pfund annehmen. Diese Annahmen kommen der Wahrheit ziemlich nahe, wenn die Breite der Brückenbahn auf 25 bis 30 Fuss sich belauft. Das Gewicht der körperlichen Einheit, also für die vorliegenden Berechnungen jenes Eines Kubikfusses der aus Schmiedeisen herzustellenden Ketten beträgt 430 Pfund, dasselbe muss indess, wie bereits im 30. Art. gesagt worden ist, bei den bevorstehenden Berechnungen zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ grösser, als es wirklich ist, in Rechnung gezogen worden, daher wir das Gewicht eines Kubikfusses oder $\sigma = 700$ Pfund setzen wollen. Was endlich die absolute Elastizität des Schmiedeisens anbelangt, so kann nach allen bisher gemachten Versuchen und Erfahrungen für den Quadratschuh

$$\Sigma = 2.500.000 \text{ Pfund}$$

angenommen werden; die grösste Spannung, welcher bei dieser Annahme der Quadratzoll des Querschnittes ausgesetzt werden dürfte, belauft sich sonach auf nahe 17361 Pfund.

Werden die angenommenen Werthe in der Gleichung (26) eingeführt, so findet man

$\Omega = 8{\cdot}0301$. Quadratschuhen = 1156·3 Quadratzollen; durch in der Gleichung (29) erfolgende Substitution jener Werthe wird dagegen

$\Omega = 8.2125$ Quadratschuhen = 1182.6 Quadratzollen gefunden. Mit Beibehaltung des erstern Querschnittes wird das Gewicht der, nach Art. (21) genau genommen 1214.074 Fuss langen Kette

$$8{\cdot}0301 \,.\, 1214{\cdot}074 \,.\, 700 = 6{,}824{,}395 \text{ Pfund},$$

mit dem andern Querschnitte dagegen

$$8{\cdot}2125 \,.\, 1214{\cdot}074 \,.\, 700 = 6{,}979{,}408 \text{ Pfund}$$

betragen, hievon entfallen im erstern Falle für den laufenden Fuss der Spannweite 5686·9958 Pfund, im andern Falle 5816.1733 Pfund, daher wird im ersten Falle die in den Aufhängepunkten stattfindende tangentiale Spannung nach der Gleichung (25) Art. (27)

$$T = 8686{\cdot}9958 \,.\, 2328 : 6262 = 20{,}228{,}766 \text{ Pfund}$$

sein, im zweiten Falle hingegen wird diese Spannung

$$T = 8816 \cdot 1733 \;.\; 2328 \cdot 6262 = 20{,}529{,}572 \text{ Pfund}$$

werden: demzufolge wird endlich der Quadratzoll der Ketten im erstern Falle mit einer Kraft von

17494 Pfund,

im andern Falle mit einer Kraft von

17360 Pfund

in Anspruch genommen.

Wir ersehen hieraus, dass trotz der, diesem Beispiele zu Grunde liegenden sehr bedeutenden Spannweite, die Formel (26) den Kettenquerschnitt genau genug angibt, indem mit Vernachlässigung der zwischen der Länge der Ketten und jener der Spannweite bestehenden Differenz der Quadratzoll dennoch nur um 134 Pfund mehr in Anspruch genommen wird, als diess im Verlaufe dieses Artikels festgesetzt wurde. Eine solche Ueberschreitung der mit 17361. Pfund für den Quadratzoll als zulässig angenommen Spannung lässt aber für die dauernde Festigkeit der Ketten nicht das Geringste besorgen, da bei den bisher ausgeführten Brücken die für den Quadratzoll entfallende Spannung zwischen 17000 und 18000 Pfund wechselt.

34. Führen wir dieselben Berechnungen für eine Brücke von 300 Fuss Spannweite, und 20 Fuss Pfeilhöhe durch, indem wir bei derselben für alle übrigen Grössen die vorhin eingeführten Werthe beibehalten, so erhalten wir nach der Gleichung (26)

$\Omega = 0.8346$ Quadratschuhen $= 120 \cdot 18$ Quadratzollen, dagegen wird nach der Gleichung (29)

$\Omega = 0.8366$ Quadratschuhen $= 120 \cdot 47$ Quadratzollen gefnnden, woraus wir ersehen, dass bei dieser noch immer bedeutenden Spannweite der Einfluss des Unterschiedes der Kettenlänge und der Spannweite bei den Quadratzollen des erforderlichen Querschnittes erst in den Dezimalien bemerklich wird,: wirklich beträgt aber dieser Unterschied im Ganzen auch nur nahe $3 \cdot 5$ Schuh, indem nach Art. (21) Gleichung (16) die halbe Bogenlänge $l = 151.76$ Fuss gefunden wird.

Mit dem ersten Querschnitte wird also das Gewicht der Ketten auf

$$0 \cdot 8346 \;.\; 303 \cdot 52 \;.\; 700 = 177322 \text{ Pfund}$$

mit dem zweiten auf

$$0 \cdot 8366 \;.\; 303 \cdot 52 \;.\; 700 = 177797 \text{ Pfund}$$

sich belaufen; hievon entfallen sonach auf den laufenden Schuh der Spannweite im ersten Falle $591 \cdot 0737$ Pfund, und im zweiten Falle $592 \cdot 6577$ Pfund; und es wird die tangentiale Spannung in den Aufhängepunkten im ersten Falle

$$T = 3591 \cdot 0737 \;.\; 582 \cdot 1564 = 2{,}090{,}566 \text{ Pfund},$$

im zweiten dagegen

$$T = 3592 \cdot 6577 \;.\; 582 \cdot 1564 = 2{,}091{,}488 \text{ Pfund}$$

betragen, also der Quadratzoll des Querschnittes erstern Falles einer Spannung von

17,394 Pfund,

andern Falles einer Spannung von

17,361 Pfund

ausgesetzt sein.

Hieraus entnehmen wir, dass der Einflnss des Umstandes, dass bei der Ableitung der Gleichung (26) statt der Länge des Bogens die Länge der Spannweite eingeführt wurde, abnehme mit der Spannweite des Bogens, und also überhaupt jene Differenz beider Längen für die bei Kettenbrücken vorkommenden Fälle ganz vernachlässigt werden könne, daher auch die aus der Gleichung (26) abgeleiteten beiden Gleichungen (27) und (28) für alle Fälle der Ausübung zureichende Genauigkeit gewähren werden.

35. Die Resultate der vorhergehenden beiden Art. zeigen uns auch, dass die Querschnitte bei gleichem aus dem Gewichte der Bahn, Hängestäbe und zufälligen Belastung für die laufende Einheit der Spannweite entfallendem Gewichtsantheile $\tilde{\omega}$, und bei gleichem Verhältnisse der Spannweite zur Pfeilhöhe, in einem viel grössern Verhältnisse, als die Spannweiten, wachsen. In der That ist diese in dem ersten Beispiele nur das Vierfache der Spannweite des letztern Beispieles, während der Querschnitt für erstere Spannweite schon nahe das Zehnfache des für die letztere erforderlichen Querschnittes beträgt.

Allgemein lässt sich das Verhältniss, in welchem unter den angeführten Bedingungen die Querschnitte zweier Brücken zu einander stehen, ermitteln, wenn man in den Gleichungen (26) und (29)

$$f = k \cdot h$$

setzt, wo also k einen zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{9}$ wechselnden Bruch bezeichnet. Dadurch gehen jene Gleichungen über in

$$\Omega = \frac{\tilde{\omega} h \sqrt{1 + 4k^2}}{2k\Sigma - \sigma h \sqrt{1 + 4k^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

und beziehungsweise in

$$\Omega = \frac{3h\tilde{\omega} \sqrt{1 + 4k^2}}{6k\Sigma - \sigma h (3 + 2k^2) \sqrt{1 + 4k^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

wo also in ersterer Gleichung der Unterschied zwischen der Länge der Spannweite und jener des Kettenbogens vernachlässigt, in letzterer aber berücksichtiget ist.

Ist nun bei zwei Kettenbrücken, deren Spannweiten h' und h'' sind, das Verhältniss der Pfeilhöhe zur Spannweite einerlei, und entfällt für beide aus dem Gewichte der Bahn, Hängestäbe und zufälligen Belastung auf die laufende Einheit der Spannweite ein gleicher Gewichtsantheil, so verhalten sich ihre Querschnitte:

$$\Omega' : \Omega'' = \frac{h'}{2k\Sigma - \sigma h' \sqrt{1 + 4k^2}} : \frac{h''}{6k\Sigma - \sigma h'' \sqrt{1 + 4k^2}}$$

wenn sie nach der Gleichung (30) berechnet werden, oder es verhalten sich diese Querschnitte

$$\Omega' : \Omega'' = \frac{h'}{6k\Sigma - h'\sigma(3+2k^2)\sqrt{1+4k^2}} : \frac{h''}{6k\Sigma - h''\sigma(3+2k^2)\sqrt{1+4k^2}}$$

wenn sie nach der Gleichung (31) bestimmt werden.

Hieraus leuchtet ein, dass unter den zu Grunde liegenden Bedingungen die Querschnitte in der That in einem viel grössern Verhältnisse als die Spannweiten wachsen müssen, weil während die Zähler der vorliegenden, dieses Verhältniss ausdrückenden Brüche eben wie die Spannweiten zunehmen, die

Nenner derselben einander nicht gleich sind, sondern mit dem Wachsen der Spannweiten abnehmen.

Aus diesen Proportionen lässt sich ferner, wie wir sehen, auch der Querschnitt einer zu erbauenden Kettenbrücke aus dem einer bereits bestehenden bestimmen, wenn erstere mit letzterer einerlei Verhältniss der Pfeilhöhe zur Spannweite hat, und das von dem Gewichte der Bahn, Hängestangen und zufälligen Belastung für die Einheit der Spannweite entfallende Gewicht für beide gleich ist: wie denn die Gleichungen (26) und (29) ein Mittel an die Hand geben, den neuen Querschnitt, wenn man schon will, aus dem einer bereits bestehenden Brücke auch bei stattfindender Verschiedenheit mehrerer oder aller in jenen Gleichungen enthaltenen Grössen durch ähnliche Proportionen abzuleiten.

Um endlich das, unter übrigens gleichen Umständen, in einem viel grössern Verhältnisse als die Spannweiten stattfindende Wachsen des erforderlichen Kettenquerschnittes aus mehreren speziellen Beispielen zu ersehen, wollen wir denselben, wie im 33. und 34. Art.

$k = \frac{2}{15}$., $\sigma = 700$., $\tilde{\omega} = 3000$, $\Sigma = 2500000$ Pfund

zu Grunde legen: hiedurch geht die Gleichung (30), welche den Querschnitt, wie wir gesehen haben, genau genug finden lässt, über in

$$\Omega = \frac{3104 \cdot 835h}{666666 \cdot 7 - 724 \cdot 4615h}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung die halbe Spannweite = 100 Fuss, und lassen wir sie nach und nach immer um 100 Fuss zunehmen, so erhalten wir daraus folgende Resultate; es ist nämlich für

$h =$ 100; 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900,

$\Omega =$ 0.5215; 1·1911; 2·0730, 3·2953; 5·0993; 8·0301; 13 6226, 23·5184; 190·7407

während demnach die Spannweiten wie die natürlichen Zahlen

1. 2, 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

zunehmen, wachsen die Querschnitte wie die Zahlen

1. 2·29, 3·97, 6·31, 9·76, 15·37, 26·07, 54·58. 365.05

woraus wir denn auch abnehmen können, welchen bedeutenden Einfluss das eigene Gewicht der Ketten auf die Grösse des erforderlichen Querschnittes hat.

36. Die im vorigen Artikel gemachte Bemerkung, welchem Umstande es zuzuschreiben sei, das die Querschnitte der Ketten in einem viel grössern Verhältnisse als die Spannweiten wachsen, auf die Gleichungen (30) und (31) angewendet, zeigt uns, dass, wenn die für den Quadratschuh als zulässig angenommene grösste Spannung bei festgesetztem Verhältnisse der Pfeilhöhe zur Spannweite nicht überschritten werden soll, dieser Querschnitt unendlich gross gemacht werden müsste, also eine Kettenbrücke mit einem einzigen Bogen nicht mehr möglich sei, wenn die zu überbauende Strombreite so gross ist, dass die halbe Spannweite h in jenen Gleichungen eingeführt, den Nenner jener Brüche = *Null* macht.

Ist aber in der Gleichung (30)

$$2k\Sigma - \sigma h\sqrt{1 + 4k^2} = 0$$

so setzt diess voraus, dass

$$h = \frac{2k\,\Sigma}{\sigma\sqrt{1+4k^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

sei, Hingegen wird in der Gleichung (31)

$$6k\,\Sigma - h\,\sigma\,(3 + 2k^2)\,\sqrt{1 + 4k^2} = o,$$

sobald

$$h = \frac{6k\,\Sigma}{\sigma\,(3 + 2k^2)\,\sqrt{1+4k^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

gemacht wird.

Setzen wir nun wie im vorigen Artikel

$k = {}^3/_{15}$, $\sigma = 700$, und $\Sigma = 2500000$ Pfund

so wird die Ausführung einer Kettenbrücke unter den Eingangs dieses Art. angeführten Bedingungen unmöglich, sobald $h = 920.2$ Fuss wird, also ihre Spannweite die Gränze von 307. Klaftern: oder noch näher bestimmt, sobald $h = 909.5$ Fuss wird, also die Spannweite die Gränze von 303 Klaftern erreichen soll, indem alsdann die mit $\Sigma = 2500000$ Pfund für den Quadratschuh festgesetzte Spannung schon durch das eigene Gewicht der Ketten sich erzeugt, in einem solchen Falle also auch den Ketten keine fremde Last mehr zu tragen aufgebürdet werden kann. Bleibt die Spannweite aber unter diesen Gränzen, so ist ein wenn auch noch so kleiner Ueberschuss der natürlichen Elastizität Σ der Ketten über ihre Spannung T bei jedem Querschnitte vorhanden, daher durch eine hinreichende Grösse desselben dieser Ueberschuss so gross erzielt werden kann, dass die Ketten nebst ihrem eigenen Gewichte auch noch jede angehängte Last zu tragen vermögen.

37. Setzt man, indem man h nach der Gleichung (33) berechnet,

$$\Sigma = 7500000 \text{ Pfund},$$

als welches die Kraft ist, bei welcher eine geschmiedete Eisenstange, deren Querschnitt einen Quadratschuh enthält, durchschnittlich zerreisst, so ergibt sich

$$h = 2728.5 \text{ Fuss},$$

und es wird also eine an beiden Enden befestigte, übrigens frei hängende Kette bei dem, im vorigen Art: bedingten Verhältnisse der Pfeilhöhe zur Spannweite, wie klein oder gross auch ihr Querschnitt immer gemacht werden mag, durch ihr eigenes Gewicht zerrissen werden, sobald ihre Spannweite 5457 Fuss, oder an 910 Klafter beträgt.

In der That ergibt sich aus der Gleichung (31) für jenes Gewicht, welches man an einer im Bogen gespannten Kette auf ihre Spannweite gleichförmig vertheilt, anhängen kann, der Ausdruck

$$\tilde{\omega} = \frac{6k\,\Sigma - \sigma\,h\,(3 + 2k^2)\,\sqrt{1 + 4k^2}}{3h\,\sqrt{1 + 4k^2}} \cdot \Omega$$

dieses Gewicht wird $=$ *Null*, sobald

$$6k\,\Sigma - \sigma\,h\,(3 + 2k^2)\,\sqrt{1 + 4k^2} = o$$

ist; diese Gleichung ist aber mit der im vorigen Art. aufgestellten Grenzengleichung einerlei, daher für die, jene Spannweite bedingende Gleichung, bei welcher eine freihängende Kette durch ihr eigenes Gewicht zerrissen wird,

auch nur die Gleichung (33) gefunden werden kann: nur muss darin Σ derjenigen Kraft gleich gesetzt werden, bei welcher, gemachten Versuchen zufolge, die Einheit des Querschnittes reisst.

Um uns nun noch von der Richtigkeit des erhaltenen Resultates, dass eine Kette, deren Spannweite unter den angeführten Bedingungen = 5457 Fuss ist, durch ihr eigenes Gewicht zerrissen werde, zu überweisen, wollen wir jetzt die Spannung, welcher sie ausgesetzt sein wird, berechnen.

Die Länge dieser Kette wird nach der Gleichung (16) Art. (21) sehr nahe 5521 Fuss betragen, und somit ihr Gewicht, wenn wir ihren Querschnitt in Schuhen = Ω machen, auf

$$700 \,.\, 5521 \,.\, \Omega = 3864700\ \Omega \text{ Pfund}$$

sich belaufen; hievon entfallen für die Einheit der Spannweite $708{\cdot}21\ \Omega$ Pfund, daher wird die tangentiale Spannung in den Aufhängepunkten nach der Gleichung (25) Art. (27) mit

$$T = 10589{\cdot}43 \,.\, 708{\cdot}21 \,.\, \Omega = 7499540\ \Omega \text{ Pfund}$$

oder $= 7500000\ \Omega$ Pfund

so nahe gefunden werden, als diess bei der Genauigkeit, mit welcher in der Gleichung (29) die halbe Bogenlänge eingeführt wurde, nur immer möglich ist. Es wird also ein 5521 Schuh langer Kettenbogen aus Schmiedeisen, bei einer Spannweite von 5457 Fuss mit Rücksicht auf die, wegen der Verbindung der einzelnen Glieder vergrösserte eigene Schwere, wenn seine Pfeilhöhe $^1/_{15}$ seiner Spannweite beträgt, durch sein eigenes Gewicht, wie klein oder wie gross man den Querschnitt auch immer machen mag, um so gewisser zerrissen zu werden, in Gefahr stehen, je näher eine Kraft von 51944 Pfund die absolute Festigkeit einer Eisenstange, deren Querschnitt Einen Quadratzoll enthält, bezeichnet.

Vierter Abschnitt.

Veränderungen, welche in der Länge, Spannweite und Pfeilhöhe der Ketten überhaupt bewirkt werden können, und Einfluss derselben auf die Krümmung, den Aufhängewinkel und die Spannung der Ketten.

---

38. Wir kommen nunmehr zu der Untersuchung, welche Veränderungen in der Figur der bisher betrachteten Krummen *AOB* : *Fig.* 12 entstehen, wenn ausser der beständigen Belastung, von welcher für die Einheit der Spannweite ein Gewicht p entfällt, eine zufällige Ueberlast p' im Scheitel *O* der Krummen aufgehangen, das bisher stattgehabte Gleichgewicht der Kräfte stört. Die Wirkung dieser Ueberlast wird offenbar zunächst eine vertikale Senkung des Scheitels *O*, also eine Vergrösserung der Pfeilhöhe sein, und wir ersehen, dass das Resultat der bevorstehenden Untersuchung, sofern sie sich die Bestimmung dieser neuen Pfeilhöhe zur Aufgabe macht, es uns möglich machen wird, die Grösse jener Schwankungen beim Entwerfen einer Kettenbrücke vorhinein beurtheilen zu können, welche durch die Passage der Wägen oder anderer zufälligen Belastungen seiner Zeit in den Kettenbogen sowohl als in der Brückenbahn werden verursacht werden, und zwar wird jenes Resultat, da die Ueberlast p' in jedem andern Punkte der Krummen angebracht, mindere Senkungen als im Scheitel selbst bewirkt, zur Beurtheilung der grössten aller durch die Passage erzeugt werdenden Schwankungen oder Abweichungen von der im Zustande des Gleichgewichtes stattfindenden Lage der Brückentheile dienen können. Wir wollen also sehen, auf welche Art die neue Pfeilhöhe, und somit die Grösse der vertikalen Senkung, so durch die im Scheitel *O* befindliche Ueberlast p' in diesem Punkte bewirkt wird, durch Kalkul gefunden werden könne.

39. Einleuchtend ist, dass durch das Einwirken jener Ueberlast p' der Scheitel *O* so lange vertikal nach abwärts wird gezogen werden, bis sich nach den Richtungen der, in dem Punkte *M* an die neuen Kurven *AM* und *BM* gezogenen Tangenten *MR*, oder in den, diesem Punkte *M* zunächst liegenden Kurvenelementen solche Spannungen erzeugen, dass die Summe ihrer vertikalen Seitenkräfte der Ueberlast p' gleich kommt. Indem aber alsdann kein Grund vorhanden ist, warum *AM* und *BM* nicht symetrische Kurven,

und die erwähnten Spannungen einander nicht gleich sein sollten, so wird, wenn wir den Winkel, welchen die eine, und somit auch die andere jener Spannungen MR mit dem Horizonte einschliesst, mit φ, und die nach MR stattfindenden Spannungen mit R' bezeichnen, dem Eingangs gesagten gemäss, der Punkt M, sich zu senken aufhören. sohald

$$2R' \; Sin\, \varphi = p'$$

geworden ist, es werden nämlich die vertikalen Seitenkräfte jeder dieser Spannungen durch

$$V' = R' \; Sin \; \varphi$$

ausgedrückt, ihre horizontalen Seitenkräfte ader sind durch

$$Q' = R' \; Cos \; \varphi$$

gegeben.

Nun sei *AM, Fig.* 13, die Kurve, in welche in Folge der in Rede stehenden Ueberlast p' die eine Hälfte der vorhin betrachteten Parabel übergegangen ist; ferner sei $AC = h$, wie bisher die halbe Spannweite des vorhin betrachteten Bogens, endlich $CM = z$ die fragliche neue Pfeilhöhe, d. i., der in der neuen Kurve in der Entfernung AC vom Punkte A stattfindende vertikale Abstand des Punktes M von der Horizontalen AD. Wir können nämlich AM als einen für sich bestehenden, in den Punkten A und M befestigten Faden betrachten, auf welchen, ohne dass er aufhört mit der Hälfte der vorhin betrachteten Kette analoge Eigenschaften zu haben, weder die andere Kettenhälfte, noch die Ueberlast p' einen weiteren Einfluss mehr hat, wenn wir, nachdem das frühere System in den neuen Gleichgewichtszustand getreten ist, uns den Punkt M plötzlich fixirt denken: und zwar ist klar, dass AM ein Theil einer Parabel sein muss, deren halbe Spannweite $AD = h'$, und deren Pfeilhöhe $DE = f'$ vor der Hand noch unbekannt sind.

Indem wir also E als Scheitelpunkt jener parabolischen Krümmung annehmen, welche dem neuen Gleichgewichtszustande beider der frühern Kurvenhälften Genüge thut, sind, auf E als Koordinaten-Urzprung bezogen, EF und FM die Koordinaten des Punktes M, und zwar ist:

$$EF = h' - h, \text{ und } FM = f' - z.$$

Diese Werthe in die allgemeine Gleichung (12) Art. (13) eingeführt, geben für den vorliegenden Falle,

$$f' - z = \frac{f' \; (h' - h)^2}{h'^2},$$

woraus

$$z = \frac{f' \; (2h'h - h^2)}{h'^2}$$

gefunden wird.

Für die trigonometrische Tangente des Winkels φ, welchen diese Krumme im Punkte M mit dem Horizonte einschliesst, erhalten wir, indem wir obige Koordinaten dieses Punktes in der Gleichung (17) Art. (22) statt x und y einführen,

$$tang\, \varphi = \frac{2 \; (f' - z)}{h' - h}$$

Eine zweite Gleichung für $tang\, \varphi$ werden wir erhalten, indem wir uns

erinnern, dass die horizontale Spannung Q' dieser neuen Krummen AME, da auch sie, so weit sie nämlich besteht, also in dem Theile AM, in der Einheit der Spannweite mit einem Gewichte p belastet ist, das jenem für die früher bestandene Krumme entfallenden gleich ist, nach der Gleichung (22) Art. (27) durch

$$Q' = \frac{1 h'^2}{2f'}$$

ausgedrückt wird, wofür wir auch

$$R' \, Cos \, \varphi = \frac{p h'^2}{2f'}$$

schreiben können. Theilt man aber die Eingangs dieses Artikels aufgestellte Gleichung

$$2R' \, Sin \, \varphi = p'$$

durch die letztgefundene, so hat man

$$tang \, \varphi = \frac{f' p'}{p h'^2}$$

Es ist also auch

$$\frac{2(f' - z)}{h' - h} = \frac{f' p'}{p h'^2}$$

woraus

$$z = \frac{f' (2p h'^2 - (h' - h) p')}{2p h'^2}$$

gefunden wird. Setzt man jetzt die für z gefundenen Werthe einander gleich, so erhält man

$$2h'h - h^2 = \frac{2p h'^2 - (h' - h) p'}{2p.}$$

aus welcher Gleichung

$$h' = h + \frac{p'}{2p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

sich ergibt; dieser Werth in der ersten der für z abgeleiteten Gleichungen statt h' eingeführt, verwandelt dieselbe in

$$z = \frac{4ph \, (ph + p') \, f'}{(2ph + p')^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Eine letzte Gleichung zur Bestimmung der Pfeilhöhe f' erhalten wir endlich, wenn wir die Länge des Bogens *AO Fig.* 12, und jene des Bogens *AM Fig.* 13 durch ihre zugehörigen Spannweiten und Pfeilhöhen ausdrücken, und, da beide Längen einander gleich sind, die hiefür gefundenen Ausdrücke einander gleich setzen.

Nun ist die Länge des Bogens *AO* gegeben durch

$$l = h \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{f}{h}\right)^2\right]$$

indem für die vorliegende Untersuchung das dritte und alle folgenden Glieder der Gleichung (16) Art. (21) vernachlässiget werden können. Für die Länge l' des Bogens AE aber hat man

$$l' = h' \left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{f'}{h'}\right)^2\right]$$

während für jene l'' des Bogens ME,

$$l'' = (h'-h) \left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{f'-z}{h'-h}\right)^2\right]$$

ist. Diese Gleichungen geben, da, wie gesagt

$$l = l' - l''$$

sein muss, nach gehöriger Substitution und Reduktion

$$\frac{f'^2}{h'} - \frac{(f'-z)^2}{h'-h} = \frac{f^2}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

als zur Bestimmung von f' dienende Gleichung, sobald für einen speziellen Fall f, h, p und p' bekannt sind. Man wird zu dem Ende vorerst h' nach der Gleichung (34), sodann z nach der Gleichung (35) berechnen, und sofort beide Werthe statt diesen Grössen in der Gleichung (36) einführen. Man erhält hiedurch eine reine quadratische Gleichung, in welcher nur mehr die Grösse f' unbekannt vorkommt, sie wird also hieraus bestimmt werden können. Der hiefür gefundene Werth mit dem, bei der Berechnung von z erhaltenen Koeffizienten von f' multiplizirt, gibt endlich z, oder die gesuchte Pfeilhöhe CM, *Fig.* 12, der aus den zwei kontinuirlichen und in dem Punkte M sich schneidenden Kurventheilen AM und BM bestehenden Krummen AMB, von welcher sonach nur noch die ursprüngliche Pfeilhöhe f abgezogen werden muss, um die fragliche Senkung OM des Scheitels O der Krummen AOB zu erhalten.

Sei z. B. wie im 34. Art. $2h = 300$ Fuss, $f' = 20$ Fuss, und der vom Gewichte der Bahn, Hängestangen und Ketten dem laufenden Fusse der Spannweite entfallende Antheil $p = 1592 \cdot 6577$ Pfund, die im Scheitel O befindliche zufällige Ueberlast aber betrage das Vierfache des letztern Gewichtes, also $6370 \cdot 6308$ Pfund; für solche Annahmen ist nach den Gleichungen (34) und (35)

$$h' = 152 \text{ Fuss}$$
$$z = 0 \cdot 9998\, f'$$

und man hat in Folge der Gleichung (36)

$$\frac{f'}{152} - \frac{\overline{0 \cdot 0002} f'^2}{2} = \frac{400}{150}$$

hieraus wird

$$f' = 20 \cdot 1329 \text{ Fuss}$$

gefunden, es ist sonach

$$z = 20 \cdot 1289 \text{ Fuss},$$

und es wird durch die im Scheitel der Krummen befindliche, das Vierfache des für die Einheit der Spannweite von der beständigen Belastung entfallenden Gewichtes betragende zufällige Ueberlast, in Folge der hiedurch bewirkt werdenden Veränderung in der Lage der Ketten die Senkung der Brückenbahn bei der in Rede stehenden Brücke in der Mitte der Bahnlänge sehr nahe $1\frac{1}{2}$ Zoll betragen.

Aus der eben durchgeführten speziellen Berechnung kann abgenommen

werden, dass der Einfluss des zweiten Gliedes im ersten Theile der Gleichung (36) auf die Grösse von z nur sehr gering ist; dieses Glied kann also für die, bei der Ausübung vorkommenden Fälle meistentheils vernachlässigt werden; hiedurch geht aber die Gleichung (36) über in

$$\frac{f'^2}{h'} = \frac{f^2}{h},$$

hieraus wird dann

$$f' = f\sqrt{\frac{h'}{h}}$$

gefunden; führt man in dieser Gleichung statt h' den hiefür durch die Gleichung (34) gegebenen Werth ein, so geht sie über in

$$f' = f\sqrt{\frac{2ph + p'}{2ph}};$$

dieser Werth gibt endlich, in der Gleichung (35) statt f' substituirt, als zur Berechnung der durch die Ueberlast p' erzeugt werdenden Pfeilhöhe z dienende Gleichung

$$z = \frac{2f\,(ph + p')\sqrt{2ph}}{(2ph + p')\sqrt{2ph + p'}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

sie zeigt, wie wir sehen, dass für $p' = o$, die Pfeilhöhe ungeändert bleibe.

40. Bei den bisherigen Untersuchungen wurden die Ketten als unausdehnbar angenommen; in der Wirklichkeit sind sie diess aber nicht, indem aus was immer für einem Materiale die Ketten auch immer bestehen mögen, jedes derselben mehr oder weniger elastisch ist, und so eine, mit der Kraft, mit welcher die Ketten ihrer Länge nach gezogen werden, nahe im geraden Verhältnisse stehende Verlängerung derselben zulässt.

In Folge dessen werden die Ketten, wenn ihre Glieder so lang gemacht werden, dass sie ohne Rücksicht auf die durch die Spannung derselben bewirkt werdenden Verlängerungen schon die, der Pfeilhöhe f und der Spannweite $2h$ nach der Gleichung (16) Art. (21) entsprechende Länge annehmen würden, nach der Aufhängung derselben und nach angehängter Bahn, noch mehr aber bei den eintretenden zufälligen Belastungen der letztern, Verlängerungen erleiden, welche, da die Entfernung der Aufhängepunkte unverändert bleibt, nothwendig weitere Senkungen der Bahn herbeiführen. Am bedeutendsten wird diese Senkung natürlicher Weise, beide Aufhängepunkte, wie bisher, als gleich hoch liegend angenommen, in der Mitte der Bahnlänge sich ergeben. Es geht hieraus hervor, dass es von besonderer Wichtigkeit sei, diese Senkungen vorhinein bestimmen zu können, um hiernach die Hängestangen um so viel zu verkürzen, dass selbst, nachdem jene Senkungen eingetreten sein werden, die Bahn noch immer horizontal, oder wenn man will, konvex bleibe.

Vorläufig ist klar, dass, um in dieser Beziehung zu einem praktisch brauchbaren Resultate gelangen zu können, durch Versuche die Grösse ermittelt sein muss, um welche eine Stange von jenem Materiale, aus dem die Ketten bestehen, bei bestimmtem Querschnitte unter der Einwirkung einer bestimmten Kraft ausgedehnt wird.

Ist diess bekannt, und geben wir zu, wie wir Giess innerhalb der Gränzen der für Kettenbrücken zulässigen Ausdehnungen ihrer Glieder nach allen Versuchen über diesen Gegenstand immerhin thun können, dass die Verlängerungen mit der Kraft, durch die sie bewirkt werden, im geraden Verhältnisse stehen, beträgt endlich die Spannung das *m*fache derjenigen Kraft, welche in denselben eine aus Versuchen bekannte Verlängerung bewirken würde, so wird durch diese Spannung auch offenbar eine *m*mal grössere Verlängerung erzeugt werden, diese Verlängerung also, sobald nur die Spannung der Ketten und deren Länge bekannt ist, eine hieraus leicht zu ermittelnde Grösse sein.

Ob nun gleich die Spannungen der einzelnen Kettenglieder von den Aufhängepunkten bis zum Scheitel fortwährend abnehmen, also die Verlängerungen, welche die einzelnen Glieder erleiden, in dem Masse geringer werden, als sie dem Scheitel näher liegen, so kann hiervon bei der Auflösung der vorliegenden Aufgabe dennoch ganz abgesehen werden, indem hiedurch diese Auflösung bedeutend vereinfacht, die Senkung des Scheitels aber um eine so unbedeutende Grösse zu gross erhalten wird, dass man in der Anwendung dieselbe ganz ausser Acht lassen kann, es überdiess immerhin rathsam ist, hiefür ein zu grosses als ein zu kleines Rechnungsergebniss zu erhalten. Letzteres wäre der Fall, wenn bei der Berechnung der zu gewärtigenden Kettenverlängerungen die tangentiale Spannung des Scheitels als die, diese Verlängerung bewirkende Kraft angenommen würde. In Fällen, wo es sich um eine grössere Genauigkeit handeln sollte, wird das arithmetische Mittel der unter beiden Voraussetzungen berechneten Kettenverlängerung der Wahrheit etwas näher liegen.

41. Nehmen wir nun an, dass γ die Grösse sei, um welche die halbe Kettenbogenlänge unter der Einwirkung, sei es nun der Spannung T oder der Spannung Q, oder des arithmetischen Mittels aus T und Q ausgedehnt wird; alsdann wird $2(l+\gamma)$ die ganze Länge der entweder nur durch die beständige Last und eigene Schwere der Ketten, oder der durch diese und die zufällige Belastung der Bahn verlängerten Ketten angeben, je nachdem man bei der Berechnung von T und beziehungsweise auch Q, entweder nur das Gewicht der Ketten, der Hängestangen und der Bahn, oder nebst diesen, auch die mögliche zufällige Belastung der Ketten in Anschlag gebracht hat.

Führen wir nunmehr die so gefundene neue Bogenlänge in der Gleichung (19) Art. (23) statt l ein, so erhalten wir für die, dieser Bogenlänge und der unverändert gebliebenen Spannweite $2h$ entsprechende Pfeilhöhe, wenn wir sie mit f' bezeichnen,

$$f' = h\sqrt{\left[\frac{3}{2}\left(\frac{l+\gamma-h}{h}\right) + \frac{27}{20}\left(\frac{l+\gamma-h}{h}\right)^2 - \frac{81}{175}\left(\frac{l+\gamma-h}{h}\right)^3 + \ldots\right]} \quad (38)$$

und man findet die zu gewärtigende absolute Senkung der Ketten im Scheitel, indem man in jedem speziellen Falle die gegebene Pfeilhöhe von der sich nach dieser Formel ergebenden abzieht. Diese Senkung wird übrigens eine bleibende, oder eine veränderliche sein, je nachdem man bei der Berechnung der Kettenverlängerung nur die beständige, oder aber diese und

die zufällige Belastung berücksichtiget hat, da mit dem Aufhören der letztern die Ketten ihre vordem gehabte Länge nach Art. (28) wieder annehmen sollen.

Ist γ so klein, dass das zweite und alle folgenden der zwischen den Klammern befindlichen Glieder obiger Reihe vernachlässigt werden können, so erhält man durch Quadrirung der so entstehenden Gleichung

$$f'^2 = \frac{3h}{2}(l + \gamma - h);$$

zieht man hievon das in einem solchen Falle auch genau genug durch

$$f^2 = \frac{3h}{2}(l - h)$$

gegebene Quadrat der ursprünglichen Pfeilhöhe ab, so erhält man

$$f'^2 - f^2 = \frac{3h\gamma}{2}$$

woraus sofort

$$f' = f\sqrt{1 + \frac{3h\gamma}{2f^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (39)$$

gefunden wird. Hiefür kann auch, indem man die Wurzel zieht

$$f' = f\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3h\gamma}{2f^2}\right) - \frac{1}{2.4}\left(\frac{3h\gamma}{2f^2}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{3h\gamma}{2f^2}\right)^3 - \ldots\right]$$

geschrieben werden, daher die absolute Senkung, d. i. die Differenz beider Pfeilhöhen in einem solchen Falle mit Vernachlässigung des dritten und der nachfolgenden Glieder der vorliegenden Reihe ziemlich nahe durch

$$f' - f = \frac{3h\gamma}{4f} \quad \ldots\ldots\ldots (40)$$

ausgedrückt wird.

Wenden wir nunmehr die Formel (38) zur Bestimmung der fraglichen Senkungen des Scheitels auf die, im 34. Art. besprochene Brücke von 300 Fuss Spannweite und 20 Fuss Pfeilhöhe an, indem wir annehmen, dass der Querschnitt der Ketten 120·47 Quadratzoll enthalte, der von der beständigen Last der Ketten, Hängestabe und Brückenbahn dem laufenden Fuss der Spannweite zukommende Gewichtstheil 1592·6577 Pfund und das dieser Einheit von der zufälligen Belastung entfallende Gewicht auch, wie dort, 2000 Pfund betrage.

Um nun vorerst die bleibende Senkung des Scheitels oder jene zu erfahren, welche durch die Einwirkung der beständigen Last wegen der Dehnbarkeit des Eisens zu gewärtigen ist, muss vor Allem die durch diese Last in den Aufhängepunkten erzeugt werdende tangentiale Spannung T berechnet werden. Diese wird nach der Gleichung (25) Art. (26)

$$T = 1592{\cdot}6577 : 582 : 1564 = 927{,}276 \text{ Pfund}$$

betragen: demzufolge wird der Quadratzoll durch die beständige Last mit einer Kraft von nahe 7697 Pfund in Anspruch genommen.

Nun ist aus den über die Dehnbarkeit des Eisens angestellten Versuchen bekannt, dass eine Stange aus Schmiedeisen bei der im 33. Art. als zulässig festgesetzten grössten Spannung von 2,500,000 Pfund bei einem Querschnitte von Einem Quadratschuh; oder von 17,361 Pfund bei einem

Querschnitte von Einem Quadratzolle um 0·0008 Theile ihrer Länge verlängert werde: die Ketten der in Rede stehenden Brücke werden daher durch obige, für die Einheit des Querschnittes nur den 2·25 Theil der letztangeführten Spannung betragende Kraft auch nur um 0·00035 Theile ihrer Länge ausgedehnt werden. Die Länge des halben Kettenbogens, welche nach Art. (21) Gleichung (16) nur 151·76 Fuss betragen sollte, wird daher in Folge der durch die beständige Last der Ketten, Bahn und Hängestangen bewirkt werdenden Spannung um 0.053 Fuss zunehmen, also auf 151·813 Fuss sich belaufen.

Führen wir nun den eben gefundenen Werth statt $l + \gamma$ in der Gleichung (38) ein, so ergibt sich

$$f' = 0{\cdot}135h = 20{\cdot}25 \text{ Fuss},$$

es wird also durch das eigene Gewicht der Ketten und durch jenes der Bahn und Hängestangen eine im Vergleiche zu der beabsichteten Pfeilhöhe nahe an

$$0{\cdot}25 \text{ Fuss} = 3 \text{ Zoll}$$

betragende bleibende Senkung des Scheitels der Krummen herbeigeführt werden, und man wird die Länge der Hängestangen entweder nach der Gleichung (12) Art. (13) oder nach der Gleichung (20) Art. (24) mit Einführung der letztgefundenen Pfeilhöhe zu berechnen haben, um darnach der Brückenbahn eine solche Lage zu geben, wie man sie unter dem Einflusse der beständigen Belastung stattfinden haben will.

Dass übrigens die berechnete Senkung, sofern sie aus dem eben betrachteten Grunde erfolgen muss, bei der Ausführung nicht überschritten werden würde, geht nicht nur daraus hervor, weil die mittlere Spannung der Ketten geringer ist, als die bei der Berechnung von f' zu Grunde gelegte Spannung T, sondern auch daraus, weil selbst diese in dem Masse abnimmt, als sich die Pfeilhöhe vergrössert. Wirklich würde diese Spannung, wenn die Ketten die oben berechnete Pfeilhöhe f' annehmen sollten, nur mehr

$$T = 1592{\cdot}6577 \,.\, 575{\cdot}4488 = 916{,}493 \text{ Pfund}$$

betragen. Beiläufig muss jedoch bemerkt werden, dass selbst diese Spannung, wenn nach derselben die Kettenverlängerung berechnet wird, für die Senkung des Scheitels kein von dem obigen merklich verschiedenes Resultat gibt.

Um nunmehr noch zur Kenntniss jener Senkung des Scheitels der Ketten zu gelangen, welche bei der in Rede stehenden Brücke durch das Hinzukommen einer für den laufenden Schuh der Spannweite 2000 Pfund betragenden zufälligen Belastung sich ergeben wird, so haben wir vor allem zu bemerken, dass für diesen Fall nach Art. (34)

$$T = 2{,}091{,}488 \text{ Pfund},$$

und die Kraft, mit welcher der Quadratzoll des Kettenquerschnittes in Anspruch genommen wird, 17,361 Pfund betrage. Diese Kraft wird daher die Ketten um 0.0008 Theile ihrer Länge ausdehnen, ihre halbe Länge wird also um 0·1214 Fuss zunehmen, und statt 151·76 nunmehr 151·8814 Fuss enthalten. Diese halbe Bogenlänge statt $l + \gamma$ in der Gleichung (38) eingeführt, gibt

$$f' = 0{\cdot}138h = 20{\cdot}7 \text{ Fuss},$$

es wird also durch eine zufällige Belastung von 2000 Pfund für den laufenden Schuh der Spannweite die unter der beständigen Belastung bereits um 0 25 Fuss oder 3 Zoll vergrösserte beabsichtete Pfeilhöhe noch um weitere

$$0{\cdot}45 \text{ Fuss} = 5{\cdot}4 \text{ Zoll}$$

zunehmen, wo indess wieder zu bemerken, dass diese Grenze wegen der mit der Zunahme der Pfeilhöhe abnehmenden Spannung der Ketten, und der bei der Berechnung der Kettenverlängerung statt der mittleren eingeführten tangentialen Spannung T nie ganz erreicht, geschweige überschritten zu werden in Gefahr steht. Wir können daher annehmen, dass durch die erfolgenden zufälligen Belastungen und Entlastungen der ganzen Bahn gegen 5 Zoll betragende Schwankungen werden herbeigeführt werden.

Endlich ersehen wir aus diesen Resultaten, dass man der Brückenbahn, damit sie zur Zeit der eintretenden grösmöglichen zufälligen Belastungen keine gegen den Strom ausgebauchte Linie annehme, nach der Mitte hin immer eine zu jener Senkung im Verhältnisse stehende Steigung geben muss, welche die zur beständigen Last des Brückenkörpers hinzukommende zufällige Belastung nach dem Gesagten zu bewirken vermag.

42. Auf analoge Art, wie diess im vorhergehenden Art. geschehen ist, wird man sich über jene Senkungen oder Hebungen der Brückenbahn Rechenschaft geben können, welche durch Temperatur-Erhöhungen oder durch Temperatur-Erniedrigungen herbeigeführt werden, indem durch erstere eine Verlängerung der Ketten, durch letztere eine Verkürzung derselben bewirkt wird.

Stellt nämlich δ die aus solcher Ursache in der halben Kettenlänge sich ergebende Differenz vor, so hat man für die Pfeilhöhe, welche die Ketten bei Temperaturs-Erhöhungen oder Erniedrigungen annehmen werden, die Gleichung

$$f' = h\sqrt{\left[\frac{3}{2}\left(\frac{l \pm \delta - h}{h}\right) + \frac{27}{20}\left(\frac{l \pm \delta - h}{h}\right)^2 - \frac{81}{175}\left(\frac{l \pm \delta - h}{h}\right)^3 + \ldots\right]} \quad (41)$$

in welcher l die in einem bestimmten Zustande der Belastung und bei einer bestimmten Temperatur statthabende halbe Kettenlänge bezeichnet, und entweder das obere oder das untere der beiden Zeichen $\pm$ beizubehalten sein wird, je nachdem die Temperatur der Atmosphäre sich erhöht oder erniedrigt.

Aus den im vorigen Art. vorgenommenen Abkürzungen leuchtet ein, dass, wenn δ so klein ist, dass bei der Berechnung von f' das zweite und die folgenden Glieder der zwischen den Klammern liegenden Reihe vernachlässigt werden können, die vorliegende Gleichung in

$$f' = f\sqrt{1 \pm \frac{3h\delta}{2f^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

übergeht, aus welcher endlich auf dem vorhin angezeigten Wege der Unterschied beider Pfeilhöhen, oder

$$f' - f = \pm\frac{3h\delta}{4f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

ziemlich genau sich ergibt.

Endlich wird auch hier die bei genauer Berechnung sich ergebende Pfeilhöhen-Differenz die Grenze sein, welche in der Wirklichkeit nicht ganz erreicht, um so weniger also überschritten werden wird, da mit einer Erhöhung der Temperatur und der hiedurch bewirkt werdenden Vergrösserung der Pfeilhöhe die Spannung der Ketten abnimmt, und somit aus diesem Grunde eine Zusammenziehung der Ketten, also eine Verminderung der Pfeilhöhe vor sich geht. Umgekehrt wird die bei Temperatur-Abnahmen vermindert werdende Pfeilhöhe die Spannung der Ketten vergrössern, daher eine Verlängerung derselben eine Zunahme der Pfeilhöhe zu Folge haben: für die Berechnung bleiben indess, wie man sich leicht überzeugen kann, diese entgegenwirkenden Modifikationen, so weit es sich um die absolute Aenderung der Pfeilhöhen handelt, ohne merklichen Einfluss.

Was nun die Folgen der Temperaturänderungen für die Ausdehnung oder Zusammenziehung der Ketten unmittelbar anbelangt, so kann man, wie diess Versuche gezeigt haben, innerhalb der Grenzen der möglichen natürlichen Temperaturwechsel annehmen, dass beide mit der Anzahl von Graden, um welche sich die Temperatur ändert, im geraden Verhältnisse stehen, so zwar: dass, sobald die Verlängerung oder Verkürzung für eine bestimmte Temperaturänderung bekannt ist, hieraus jene, welche bei jedem gegebenen Temperaturwechsel zu gewärtigen steht, wird abgeleitet werden können.

So wird für Ketten aus Schmiedeisen, da sich dieses bei einer, 80 Grad des Reaumur'schen Thermometers betragenden Temperatursänderung um 0.0012 Theile seiner Länge verlängert oder verkürzt, je nachdem die Temperatur um dieses Mass zu- oder abnimmt, wenn ihre Länge bei einer Temperatur von *Null* Grad gleich l gefunden wird, ihre Verlängerung bei 30 Grad ober *Null* durch $0.00045l$, und ihre Verkürzung bei 20 Grad unter *Null* durch $0.0003l$ ausgedrückt werden. Diejenigen Senkungen des Scheitels der Ketten, welche durch 50 Grad betragende Temperaturerhöhungen, d. i. durch einen Wechsel der Temperatur von 20 Grad unter *Null* bis auf 30 Grad ober *Null*, oder eine 0.00075 Theile ihrer Länge betragende Veränderung bewirkt werden, werden jener sonach ziemlich gleich kommen, welche eine Folge der, unter dem Einflusse der beständigen und zufälligen Belastung berbeigeführten Kettenverlängerung sind.

Bei dem Entwerfen der Hängebrücken wird man daher auf den besprochenen Einfluss der möglichen Temperaturwechsel auch so weit Rücksicht zu nehmen haben, dass man durch gehörige Modifikation der Hängestangenlängen versichert sein kann, dass die Bahn bei keiner Temperatur eine konkave Oberfläche bilden wird. Nehmen wir z. B. an, dass das Einhängen der Bahn bei der im vorigen Art. besprochenen Brücke bei einer Temperatur von 10 Grad ober *Null* geschieht, so müssen vorerst wegen der durch die Dehnbarkeit der Ketten bei entstehenden zufälligen Belastungen der Bahn herbeigeführt werdenden Vergrösserung der beabsichteten Pfeilhöhe die Hängestangen von den Widerlagern gegen den Scheitel hin allmälig mehr und mehr, und hier schon um nahe 5 Zoll kürzer gemacht werden, als sie mit Absehung von diesem Umstande, aber mit Rücksicht auf das, Art. (41) Gesagte nach den Gleichungen des ersten oder zweiten Abschnittes für eine horizontale

Bahn angeordnet werden würden, weil aber ein möglicher Temperaturwechsel von 10 Grad bis zu 30 Grad ober *Null* die Ketten nur um 0.0003 Theile ihrer Länge zunehmen macht, und hiedurch, wie wir im vorigen Art gesehen haben, eine weitere, gegen 2 Zoll betragende Vergrösserung der Pfeilhöhe zu gewärtigen steht, so müssen den Hängestangen im Scheitel im Ganzen an 8 Zoll von der mit Abstraktion von diesem Umstande für eine horizontale Bahn berechneten Länge, und den übrigen verhältnissmässig viel abgenommen werden, wenn sie unter der grösstmöglichen zufälligen Belastung und bei der bei uns gewöhnlich höchsten Temperatur in der Mitte der Brücke keine Bahnkonkavität zulassen sollen.

43. Eine weitere hieher gehörige Untersuchung ist auch die, welche Veränderungen in der Pfeilhöhe der Krummen vor sich gehen, wenn die Aufhängepunkte der Ketten einander durch zufällige Ursachen näher gebracht werden; wir werden in den nächsten Abschnitten die Umstände, die diess möglich machen, besprechen. Offenbar ist, dass eine jede Annäherung der Aufhängepunkte eine Vergrösserung der Pfeilhöhe zur Folge haben wird; die absolute Grösse dieser neuen Pfeilhöhe aber kann, wie für sich klar ist, wenn d die Grösse, um welche je einer der Aufhängepunkte horizontal verschoben wird, also $2d$ die Verminderung der ganzen Spannweite bezeichnet, dadurch gefunden werden, dass man in der Gleichung (19) Art. (23), $h - d$ statt h substituirt.

Allgemein ist demnach, wenn die Spannweite um die Grösse $2d$ ab- oder zunimmt, die zugehörige Pfeilhöhe durch die Gleichung

$$f'=(h\mp d)\sqrt{\left[\frac{3}{2}\left(\frac{l}{h\mp d.}\right)+\frac{27}{20}\left(\frac{l-h\pm d}{h\mp d.}\right)^2-\frac{81}{175}\left(\frac{l-h\pm a}{h\mp a.}\right)^3+\ldots\right]}\ldots(44)$$

gegeben, welche übrigens auf dem, im 41. Art. angegebenen Wege, wenn d auch klein genug ist, um bei der Berechnung von f' mit dem ersten der innerhalb der Klammern liegenden Glieder der letzten Reihe sich begnügen zu können, übergeht in

$$f' = f\sqrt{\left[1 \pm \frac{3d}{2f^2}(2h - l \mp d)\right]}\ldots\ldots\ldots(45)$$

Hieraus ergibt sich endlich auf dem im 41. Art. weiter eingeschlagenen Wege für den vorliegenden Fall

$$f' - f = \pm\frac{3d}{4f}(2h - l)\ldots\ldots\ldots(46)$$

wenn nämlich d im Vergleiche mit $(2h-l)$ vernachlässigt werden kann.

Neigen sich z. B. in Folge der eintretenden zufälligen Belastung der Brückenbahn die Pfeiler der im 41. Art. besprochenen Brücke ein wenig gegen die Bahn hin, in der Art, dass angenommen werden kann, dass hiedurch die 300 Fuss betragende Spannweite um 0·2 Fuss vermindert werde, also $d = 0{\cdot}1$ Fuss sei, so wird für diese Brücke, da für die Abnahme der Spannweite das obere der beiden Zeichen beizubehalten ist, nach der Gleichung (44) die neue Pfeilhöhe

$$f' = 0{\cdot}137\,(h-d) = 20{\cdot}54 \text{ Fuss}$$

werden, also in Folge dieses Umstandes die ursprüngliche Pfeilhöhe um

$$0{\cdot}54 \text{ Fuss} = 6.58 \text{ Zoll}$$

oder um nahe 6 ½ Zoll zunehmen.

44. Indem wir aus den im vorigen und im 41. Art. berechneten speziellen Beispielen ersehen, welchen bedeutenden Einfluss eine noch so geringe Abweichung von der für eine bedingte Pfeilhöhe erforderlichen Spannweite und Kettenlänge auf die Pfeilhöhe selbst hat, wollen wir jetzt noch eine allgemeine Formel aufstellen, nach welcher die Veränderung der Pfeilhöhe berechnet werden kann, wenn sowohl in der Kettenlänge als auch in der Spannweite Veränderungen vor sich gehen, die Grösse dieser, aus was immer für Ursachen herbeigeführten Abweichungen von der beabsichteten Kettenlänge und Spannweite aber gegeben ist. Bezeichnet man nämlich mit δ die Zu- oder Abnahme, welche die halbe Kettenlänge l, und mit d die Ab- oder Zunahme, welche die halbe Spannweite h erleidet, so ist die, diesen neuen Kettenlängen und Spannweiten entsprechende Pfeilhöhe f' wie für sich einleuchtet, bedingt durch die Gleichung

$$f' = (h \mp d)\sqrt{\left[\frac{3}{2}\left(\frac{l \pm \delta - h \pm d}{h \mp d}\right) + \frac{27}{20}\left(\frac{l \pm \delta \; h \pm d}{h \mp d}\right)^2 - \ldots\right]} \ldots (47)$$

Hieraus ergibt sich auf dem schon bekannten Wege, wenn δ und d so klein sind, dass man sich auf das erste Glied der unter der Wurzel stehenden Reihe beschränken kann,

$$f' = f\sqrt{\left[1 + \frac{3}{2f}\left(h(\pm 2d \pm \delta) \mp d\,(l \pm d \pm \delta)\right)\right]} \ldots (48)$$

woraus schliesslich ziemlich nahe

$$f' - f = \frac{3}{4f}\left[h\,(\pm 2d + \delta) \mp dl\right] \ldots (49)$$

erhalten wird, wenn $(\pm d \pm \delta)$ im Vergleiche mit l vernachlässigt werden darf.

45. Betrachten wir jetzt noch jene Veränderungen, welche die Länge der Krummen erfährt, wenn, sei es als Folge der, durch ihre eigene bald grössere bald kleinere Spannung verlängert oder verkürzt werdenden Spannketten, sei es als Folge der, durch eingetretene Temperaturänderungen bewirkten Veränderungen der Länge dieser Ketten, sei es endlich als Folge ihrer bei stattfindendem Spannungswechsel bald zu- bald abnehmenden Beugung ein Gleiten der Ketten über die Pfeiler, entweder von der Spann- nach der Tragseite, oder von der Trag- nach der Spannseite vor sich gegangen, und hiedurch ihre Pfeilhöhe entweder vergrössert oder verkleinert worden ist. Für einen solchen Fall ist, wenn die Zu- oder Abnahme der Pfeilhöhe mit b, und die neue Länge der Krummen mit l' bezeichnet wird, letztere nach Art. (21) Gleichung (16) gegeben durch

$$l' = h\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{f \pm b}{h}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{f \pm b}{h}\right)^4 + \frac{4}{7}\left(\frac{f \pm b}{h}\right)^6 - \ldots\right] \ldots (50)$$

Nehmen wir nun wieder an, dass b so klein sei, dass man bei der Berechnung von l' das dritte und die übrigen Glieder der zwischen den Klammern befindlichen Reihe nicht mehr zu beachten braucht, so wird man auf dem im Art. (41) eingeschlagenen Wege nur dass es der Quadrirung dabei nicht nöthig hat, zur Gleichung

$$l' = l \pm \frac{2b}{3h}(2f \pm b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

gelangen, aus welcher endlich, wenn b klein genug ist, um im Vergleiche mit $2f$ vernachlässigt werden zu können,

$$l' - l = \pm \frac{4fb}{3h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

gefunden wird.

46. Welche Veränderungen in allen bisher betrachteten Fällen in der Grösse der Koordinaten, des Aufhangewinkels und der Spannung der Krummen eintreten, ist, sobald nur die zugehörigen Spannweiten, Pfeilhöhen und Bogenlängen bekannt und beziehungsweise berechnet worden sind, nach den Gleichungen der ersten drei Abschnitte in jedem speziellen Falle leicht zu ermitteln: daher die Ableitung allgemeiner Ausdrücke hiefür, die, wenn sie genau sein sollen, viel zu verwickelt ausfallen, um zum Gebrauche geeignet zu sein, als überflüssig sich darstellt; geben sie aber nur Näherungswerthe an, so ist damit auch keineswegs gedient. Es bedarf daher endlich keiner besondern Erinnerung, dass dort, wo es sich um eine genauere Beantwortung der Fragen, deren Lösung nach den Gleichungen dieses Abschnitts und durch Substituirung der hiernach gefundenen Resultate in die Gleichungen der frühern drei Abschnitte zu geschehen hat, handelt, man sich der abgekürzten Endformeln dieses Abschnittes selten wird bedienen können, da diese, wie man sich durch spezielle Beispiele leicht überzeugen kann, stets um nahe $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{2}$ abweichende Werthe finden lassen.

Fünfter Abschnitt.

Einfluss der Tragkettenspannung auf die Spannung der Spannketten, und Einfluss beider Spannungen auf die Standfestigkeit der Pfeiler.

47. Wir wollen jetzt zur Bestimmung derjenigen Spannung übergehen, die durch die Spannung der Tragketten in den Spannketten bei jenen Kettenbrücken sich erzeugt, welche die Anlage der letztern erfordern, indem die Fälle äusserst selten sind, wo sich an dem Orte einer zu erbauenden Kettenbrücke so hoch gelegene hinreichend feste Stellen vorfinden, um die Tragketten, wie dies bei der über die Tweed führenden Unionsbrücke an dem einen Ufer geschehen ist, unmittelbar in denselben befestigen zu können.

Man wird sonach in jedem andern Falle die Tragketten über Stützen oder Pfeiler führen müssen, um sie an der vom Flusse abgewendeten Seite als Spannketten unter mehr oder weniger flachen Winkeln in den Erdboden treten und hier ihre Befestigung finden zu lassen. In solchen Fällen ist es nun unerlässlich, die Grösse jener Spannung vorhinein angeben zu können, welche als Folge der Spannung der Tragketten in den Spannketten bewirkt wird, da man nur hiedurch auf die Grösse des Querschnittes, den sie erhalten sollen, so wie auf jenen Widerstand wird schliessen können, welchen die Befestigungspunkte dieser Ketten, den sie, nach der verschieden möglichen Befestigungsweise, verschieden in Anspruch nehmenden Kräften werden leisten müssen. Ein weiterer Grund für die Nothwendigkeit der jedesmaligen Ermittlung der Spannkettenspannung ist der Umstand, dass man nur hieraus und aus der Spannung der Tragketten die Grösse jener Kräfte ableiten kann, durch welche sowohl die rückwirkende Festigkeit der Stützen oder Pfeiler, über welche die Ketten weggeführt werden sollen, als ihre Standfestigkeit wird in Anspruch genommen werden: was zur Feststellung der Dimensionen, welche diesen Stützen oder Pfeilern gegeben werden müssen, offenbar unerlässlich ist.

So viel lässt sich in dieser Beziehung vor der Hand abnehmen, dass die Spannung der Spannketten nicht einerlei Gesetz befolgen werde, bei jenen Brücken, wo die Ketten über einfache, so leicht bewegliche Stützen

weglaufen, dass eine Neigung derselben, sofern die Ketten mit ihrem oberen Theile fest verbunden sind, nach der Bahnseite ohne irgend einem bedeutenden eigenem Widerstande möglich ist, sobald eine Zunahme in der Tragkettenspannung vor sich geht, und bei jener Anordnung, wo die Ketten über Pfeiler weggeführt werden, welche eine zureichende eigene Stabilität haben, um solche Bewegungen nicht leicht zuzulassen, und über welche die Tragketten sonach bei eintretender Spannungszunahme, ohne eine merkliche Bewegung der Pfeiler zu bewirken, mit Ueberwindung eines bald grösseren, bald kleineren Reibungswiderstandes nach der Bahnseite hingleiten können. Sollten die Ketten endlich mit solchen Pfeilern unzertrennbar verbunden sein, so werden die Spannketten nur so weit in Anspruch genommen werden, als die eigene Schwere der Pfeiler nicht gross genug ist, um den sie umzustürzen suchenden Kräften genügend zu widerstehen.

Dass eine so geringe Bewegung, als sie nothwendig ist, um die Spannung der Spannketten wachsen zu machen, bei möglichst gerade gespannten Spannketten überhaupt, und insbesondere ohne Nachtheil für den Zusammenhang der Pfeilertheile bei wie massiv auch immer aufgeführten Pfeilern möglich sei, und unter diesen Umständen auch immer erfolgen werde, kann bei der natürlichen Elastizität, welche den Pfeilern stets mehr oder weniger inwohnt, und der Dehnbarkeit der Spannketten bei wachsender Spannung, abgesehen von der Unmöglichkeit, sie bis zur geraden Linie zu spannen, kaum bezweifelt werden. Um insbesondere beurtheilen zu können, wie bedeutend die Elastizität der massivsten Körper sei, wird hier nur beispielweise angeführt, dass schon, wenn man die Hand an das Mauerwerk eines solid aufgeführten Wohngebäudes in einem der höhern Stockwerke fest andrückt, eine auf der Fensterbrüstung aufgelegte Wasserwage eine Veränderung in der Lage ihrer Luftblase zeigt; so wurden ferner an der, in den äusserst massiven Mauern der Mailänder-Sternwarte eingemauerten Libelle, die nie vom Sonnenlichte unmittelbar getroffen werden konnte, Schwankungen beobachtet, je nachdem diese Mauern den Einwirkungen der Sonnenwärme ausgesetzt waren oder nicht. Die Unmöglichkeit, die Spannketten bis zur geraden Linie zu spannen, um so bei wachsender Spannung derselben, wenn schon nicht die, wegen ihrer eigenen Dehnbarkeit, so mindestens die, wegen ihrer Annäherung zur geraden Linie möglich werdende Neigung der Pfeiler zu verhüten, wird gerne zugegeben werden, wenn man bemerkt, dass es durch keine Kraft möglich sei, auch nur die horizontalen Fäden des Fadenkreuzes astronomischer Fernröhre, welche zu den feinsten und leichtesten gehören, so nur angetroffen werden können, eine gerade Linie annehmen zu machen.

48. Um nun für den einfachsten der angeführten Fälle, für jenen, wo die Ketten *NAM*, *Fig.* 14, über vertikal stehende, leicht bewegliche Stützen *AB* weglaufen, mit deren obern Ende *A* sie so fest verbunden sind, dass, je nachdem der horizontale aus den Spannungen der Ketten hervorgehende Zug entweder nach *E* oder nach *D* hin grösser wird, eine Bewegung in *A* nach *E* oder *D* hin nothwendig erfolgen muss, um für diese einfachste Anordnung die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes zu finden, wollen wir den Winkel *DAN*, welchen bei dem eingetretenen Zustande des Gleichgewichtes

aller Kräfte die Spannketten mit der Horizontalen DE einschliessen, mit w, mit α dagegen denjenigen Winkel bezeichnen, welchen die Tragketten in dem Aufhängepunkte A mit dem Horizonte bilden. So wie der Winkel α den bisher damit bezeichneten Winkel darstellt, mögen auch p, Q und T in dem bisherigen Sinne genommen werden. Mit R werde endlich diejenige Spannung vorgestellt, welche in den Spannketten AM im Zustande des Gleichgewichtes aller Kräfte Statt hat.

Diesen Zustand zugegeben, muss offenbar die rückwirkende Festigkeit der Stütze AB die aus den Spannungen R und T hervorgehenden vertikalen Seitenkräfte genügend überwiegen, um gegen das Zusammendrücken gesichert zu sein; die aus beiden Spannungen hervorgehenden horizontalen Seitenkräfte aber müssen einander nothwendig gleich sein, da im entgegengesetzten Falle eine Bewegung des Punktes A nach D oder E hin, unvermeidlich wäre. Im Zustande des Gleichgewichtes muss also, indem man sich sowohl die Spannung R, als auch die Spannung T in eine horizontale und vertikale Seitenkraft zerlegt denkt,

$$R\,Cos\,w = T\,Cos\,\alpha$$

sein; hieraus wird

$$R = T\,\frac{Cos\,\alpha}{Cos\,w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

gefunden, und wir ersehen aus dieser Gleichung, dass die Spannung der Spannketten bei der in Rede stehenden Anordnung um so geringer wird, je kleiner der Winkel ist, unter welchem man die Spannketten von der Horizontalen abweichen lässt, dass sie jedoch nie kleiner, als die horizontale Spannung der Tragketten werden kann; dass sie ferner jener der Tragketten im Aufhängepunkte gleich wird, sobald die Winkel α und w einander gleich sind; dass sie endlich unendlich gross werden würde, wenn es denkbar wäre, die Spannketten von A ab, vertikal in den Boden treten zu lassen.

Der vertikale Druck, welcher in A stattfindet, und der die rückwirkende Festigkeit der Stützen bedingt, da er, wie gesagt, nichts anderes als die Summe der vertikalen Seitenkräfte der Spannungen T und R ist, wird, wenn wir ihn mit P bezeichnen, gegeben sein durch die Gleichung

$$P = T\,Sin\,\alpha + R\,Sin\,w;$$

oder indem man statt R seinen vorhin abgeleiteten Werth in dieser Gleichung einführt, durch

$$P = T(Sin\,\alpha + Cos\,\alpha\,tang\,w) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

woraus wir abnehmen, dass auch diese Kraft mit der Abnahme des Winkels w abnehme, und umgekehrt wachse, sobald w wächst.

49. Nehmen wir jetzt an, dass die angeführten, leicht beweglichen Kettenstützen AB, *Fig.* 15, nicht vertikal stehen, sondern gegen die Spannketten hin geneigt, von der vertikalen Richtung AC unter dem Winkel $CAB = \beta$ abweichend angeordnet werden. Um für diesen Fall die Spannung der Spannketten und den Druck zu finden, welchem die Stützen AB ausgesetzt sein werden, werde jede der Spannungen R und T in zwei Kräfte zerlegt, wovon die eine horizontal, die andere in der Richtung der Stütze AB von A gegen B hin wirkend angenommen wird. Weil sich nun die Kräfte

in dem so entstehenden Kräftenparallelogramme wie die Sinusse der gegenüberliegenden Winkel verhalten, so wird die sich so ergebende horizontale Seitenkraft der Spannung T, da der Winkel

$$ATE = TAG = 90 - (\alpha + \beta)$$

und der Winkel

$$AET = AGT = 90 + \beta;$$

ferner allgemein

$$Sin\ (90 \pm a) = Cosa$$

ist, ausgedrückt durch

$$Q' = T\ \frac{Cos\,(\alpha + \beta)}{Cos\,\beta}\ .$$

Die horizontale Seitenkraft der Spannung R, da der Winkel $DRA = RAH = 90 - (w - \beta)$

und der Winkel

$$RDA = RHA = 90 - \beta$$

ist, wird dargestellt durch

$$Q' = R\ \frac{Cos\,(w - \beta)}{Cos\beta}\ .$$

Weil aber im Zustande des Gleichgewichtes des Systems beide sich also ergebenden horizontalen Spannungen einander gleich sind, so müssen auch die hiefür gefundenen Ausdrücke einander, oder für diesen Zustand

$$TCos\ (\alpha + \beta) = RCos\ (w - \beta)$$

sein, woraus denn die fragliche Spannung der Spannketten, oder

$$R = T\ \frac{Cos\,(\alpha - \beta)}{Cos\,(w - \beta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

gefunden wird.

Die in der Richtung der Stützen von A gegen B wirkenden Seitenkräfte der Spannungen T und R ergeben sich aus dem angeführten Kräftenparallelogramme mit

$$T\ \frac{Sin\,\alpha}{Cos\,\beta},\ \text{und}\ R\ \frac{Sin\,w}{Cos\,\beta};$$

daher müssen die Stützen stark genug sein, um einem sie rückwirkend in Anspruch nehmenden Drucke widerstehen zu können, welcher der Summe der beiden letztabgeleiteten Kräfte gleich ist, und der sonach gegeben ist durch die Gleichung

$$P = T\ \frac{Sin\,\alpha}{Cos\,\beta} + R\ \frac{Sin\,w.}{Cos\,\beta};$$

substituiren wir nun statt R in dieser Gleichung seinen vorhin gefundenen, durch die Gleichung (55) gegebenen Werth, so geht sie über in

$$P = T\left(\frac{Sin\,\alpha}{Cos\,\beta} + \frac{Cos\ (\alpha + \beta)\ Sin\,w.}{Cos\ (w - \beta)}\right);$$

und weil allgemein

$$Cos\ (a \pm b) = Cos\,a\ Cos\,b \mp Sin\,a\ Sin\,b,$$
$$Sin\ (a \pm b) = Sin\,a\ Cos\,b \pm Sin\,b\ Cos\,a,$$
$$Sin^2\,a + Cos^2\,a = 1.$$

ist, so erhalten wir durch demgemässe Entwickelung der angezeigten Kosi-

nusse der letzten Gleichung, indem man ferner beide Brüche auf einerlei Nenner bringt, und nach gehöriger Reduktion und Substitution

$$P = T \frac{Sin\ (\alpha + w)}{Cos\ (w - \beta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

50 Wird den Stützen *AB* eine solche Stellung gegeben, dass der Winkel *BAH* dem Winkel *GAT* gleich, nämlich der von den Trag- und Spannketten eingeschlossene Winkel *RAT* durch die Stützen halbirt wird, so ist, wie leicht einzusehen,

$$(\alpha + \beta) = (w - \beta);$$

diese Werthe in der Gleichung (55) eingeführt, geben sofort

$$R = T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

bei solcher Anordnung ist also die Spannung der Spannketten jener der Tragketten gleich.

Weil ferner aus der vorhin aufgestellten Gleichung

$$(\alpha + \beta) = (w - \beta)$$

der Winkel

$$\beta = \frac{w - \alpha}{2}$$

sich ergibt, so erhält man, indem man diesen Werth in der Gleichung (56) einführt, für den Druck, welchen im vorliegenden Falle die Stützen erleiden, den Ausdruck

$$P = T \frac{Sin\ (\alpha + w)}{Cos\left(\frac{(\alpha + w}{2}\right)},$$

wofür wir, weil allgemein

$$Sin\, a = 2Sin\, \tfrac{1}{2}\, a\ Cos\, \tfrac{1}{2}\, a$$

ist, offenbar auch

$$P = 2T\, Sin\, \left(\frac{\alpha + w}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

schreiben können.

51. Geringer, als sie sich aus den bisher dafür aufgestellten Gleichungen ergibt, wird die Spannung der Spannketten in jenen Fällen bleiben, wo die Ketten auf Pfeilern befestiget werden, welche eine durch ihre Schwere und Konstruktion bedingte Standfestigkeit besitzen. In der That konnten und haben wir bei den diessrücksichtlich bisher angestellten Untersuchungen davon ganz abgesehen, dass ein Theil der Tragkettenspannung zu jener Bewegung der Stützen verwendet werde, welche in einer drehenden Bewegung derselben um ihre Basis, und zwar, von der Spann- nach der Tragseite hin, bestehend, nothwendig so lange vor sich geht, bis die Pfeilhöhe der Spannketten so weit abgenommen, jene der Tragketten aber so weit zugenommen hat, dass in Folge der hiermit eintretenden beziehungsweisen Spannungs-Zu- und Abnahmen den in den drei vorhergehenden Artikeln abgeleiteten Gleichgewichtsgleichungen mehr oder weniger — nach Mass nämlich der, durch die zur Bewegung der Pfeiler erforderlichen Kraft geringer nothwendigen Spannkettenspannung — Genüge geschieht.

Der eben besprochenen, durch die Spannung der Tragketten bewirkt

werdenden Neigung der Pfeiler widerstreben diese am wesentlichsten durch ihre eigene Schwere, und wir ersehen, dass in dem Masse, als ihr Gewicht bei übrigens gleicher Konstruktionsweise grösser ist, in demselben Masse sich in den Spannketten eine geringere Spannung erzeugen werde, wenn anders sowohl die Trag- als die Spannketten mit dem Pfeiler unzertrennbar verbunden sind.

Es ist somit von Wichtigkeit, einen Ausdruck zu finden, nach welchem jene Spannung berechnet werden kann, welche die Spannung der Tragketten in den Spannketten für die in Rede stehende Anordnung ihrer Unterstützung bewirken wird. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass man die zur Herstellung des Gleichgewichtes der Kräfte erforderliche Vorwärtsneigung der Pfeiler ohne Gefahr für ihren Bestand zulassen könne, was, wie schon früher gesagt worden ist, wenn man bei dem Einhängen der Spannketten diese nach möglichst geraden Linien anlegt, immerhin der Fall ist.

52. Die Kraft, welche den, wegen unzureichender eigener Stabilität mit Spannketten zu versehenden Pfeiler *ABDC, Fig.* 16, gegen die Bahn hin sich zu neigen veranlasst, ist die Differenz der horizontalen Seitenkräfte der in den Punkten *C* und *A* stattfindenden Spannketten- und Tragketten-Spannungen: dieses Vorwärtsneigen ist, wie gesagt, einerseits in dem Masse mehr möglich, je grösser die Dehnbarkeit und Abweichung der Spannketten von der geraden Linie ist, anderseits sind die Kräfte, welche diesem Vorwärtsneigen sich widersetzen, strenge genommen, die Elastizität, das eigene Gewicht der Pfeiler und die Kohäsion seiner Theile. Um die Untersuchung möglichst zu vereinfachen, wollen wir die erste und die letzte dieser Kräfte ganz ausser Acht lassen. Hierdurch wird zwar für die Spannung der Spannketten ein etwas zu grosser Werth sich ergeben; eine Folge dessen ist jedoch nur, dass der hiernach bemessen werdende Spannkettenquerschnitt jedenfalls genügende Sicherheit gewähren wird, eben so werden unter der angeführten Voraussetzung bei festgesetztem Spannkettenquerschnitte die gesucht werdenden Pfeiler-Dimensionen etwas grösser gefunden, als sie für den Zustand des Gleichgewichtes erforderlich sind; aber eben hiermit ist die Zulässigkeit der Ausserachtlassung jener zwei Kräfte um so mehr gerechtfertigt, als damit, wie erwähnt, die Untersuchung bedeutend vereinfacht, der Unterschied jedoch wegen des unbedeutenden Einflusses eines solchen Vorganges keine verschwenderischen Anordnungen zur Folge haben wird; wie denn der Pfeiler wirklich mit seinem ganzen Gewichte allein auch erst alsdann eine weitere Bewegung zu verhindern anfängt, wenn die Zusammendrückbarkeit und Ausdehnbarkeit seiner Theile ihre äusserste Grenze erreicht hat.

Indem wir nun dem Pfeiler *ABDC*, dessen Höhe $= h$, dessen in der Krone und am Fusse gleiche Breite $= b$, dessen obere Länge $= l$ sein mag, am Fusse, um seine zu gewärtigenden Neigungen dem Auge in etwas zu entziehen, eine Ausladung nach der Spann- und Tragseite, also seiner Länge nach geben, welche das $n$fache seiner Höhe ist, wollen wir mit g das absolute Gewicht seiner körperlichen Einheit, mit $\varkappa$, α, R und T aber die bisher hiedurch vorgestellten Grössen bezeichnen. Das statische Moment,

mit welchem der Pfeiler den ihn um die Kante *B* gegen *M* zu drehen suchenden Kräften widersteht, ist sonach gegeben durch

$$\left(\frac{l}{2} + nh\right)(l + nh)\, bhg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Der horizontale Zug, welcher im Zustande des Gleichgewichtes, die Punkte *A* und *C* gleich hoch liegend angenommen, von *A* gegen *K* hin statt hat, ergibt sich, indem man die Kraft *R* und *T* in horizontale und vertikale Seitenkräfte zerlegt, mit

$$T\,Cos\,\alpha - R\,Cos\,w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

und das, auf die Drehungsachse *B* bezogene statische Moment dieser den Pfeiler umzustürzen suchenden Kraft ist gegeben durch

$$h\,(T\,Cos\,\alpha - R\,Cos\,w).$$

Endlich bewirkt die Kraft *T* einen vertikalen Druck, welcher durch

$$T\,Sin\,\alpha,$$

und die Kraft *R* einen Druck nach eben dieser Richtung, welcher durch

$$R\,Sin\,w$$

ausgedrückt wird, und welche addirt, als:

$$T\,Sin\,\alpha + R\,Sin\,w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

den Gesammtdruck darstellen, welchem der Pfeiler in vertikaler Richtung ausgesetzt ist. Beide vertikale Pressungen vermehren die Stabilität des Pfeilers; das statische Moment des erstern wird durch

$$nh\,T\,Sin\,\alpha;$$

jenes des letztern durch

$$(nh + l)\,R\,Sin\,w,$$

in Bezug auf *B* als Drehungsachse dargestellt.

Findet nun wirklich keine Bewegung statt, d. i. stehen alle diese Kräfte oder beziehungsweise ihre statischen Momente im Gleichgewichte, so muss offenbar der Gleichung

$$h\,(T\,Cos\,\alpha - R\,Cos\,w) = nh\,T\,Sin\,\alpha + (nh + l)\,R\,Sin\,w + \left(\frac{l}{2} + nh\right)(l + nh)\,bhg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Genüge geschehen, eine Gleichung, aus welcher in jedem speziellen Falle, je nachdem man die Spannung der Spannketten oder die Pfeilerstärke bedingt hat, die zugehörige beziehungsweise Pfeilerstärke oder Spannkettenspannung wird berechnet werden können.

53. Hat man den Spannkettenquerschnitt und somit auch die Spannung *R*, welcher diese Ketten äussersten Falles unterzogen werden sollen, beliebig, auch die Pfeilerkonstruktion vorläufig festgesetzt, so kann man das Zureichen der Stabilität der letztern auch dadurch prüfen, dass man aus *R* und *T* die Richtung der Mittelkraft ableitet: geht letztere noch innerhalb der Grundfläche der Pfeiler fort, so ist ihre Stabilität offenbar nicht gefährdet; geht sie dagegen ausserhalb der Pfeilerbasis an dem Drehungspunkte *B* vorüber, so muss für den Zustand des gesicherten Gleichgewichtes, und um insbesondere die Spannung der Spannketten nicht grösser als sie bedingt worden, anwachsen zu machen, das statische Moment des auf die Achse *B* bezogenen, durch den Ausdruck (59) gegebenen Pfeilergewichtes

jenes der auf dieselbe Achse bezogenen Mittelkraft aus R und T überwiegen, oder demselben mindestens gleich sein.

Die Grösse dieser Mittelkraft wird aus dem Kräftenparallelogramme $EGFL$, Fig. 16, in welchem EG die Spannkettenspannung, FG die Tragkettenspannung, GL die Grösse der Mittelkraft aus beiden, und $OGL = \beta$ den Winkel darstellt, welchen ihre Richtung mit der Vertikalen OG bildet, wenn wir sie mit P bezeichnen, gefunden mit

$$P = \sqrt{[R^2 - 2RT\,Cos\,(\alpha + w) + T^2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Man darf sich zu dem Ende nur die Kraft GL in eine horizontale und vertikale Seitenkraft zerlegt denken; die eine muss offenbar der vorhin gefundenen Differenz

$$T\,Cos\,\alpha - R\,Cos\,w.$$

der horizontalen Seitenkräfte der Spannungen R und T; die andere aber der im vorigen Artikel ermittelten Summe

$$T\,Sin\,\alpha + R\,Sin\,w$$

der vertikalen Seitenkräfte jener Spannungen gleich sein. Die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der letzten zwei Binome aber bedingt die Grösse der Kraft P, beide Quadrate addirt und reduzirt, geben endlich, indem man bemerkt, dass allgemein

$$Sin^2 a + Cos^2 a = 1.$$

$$Cos\,(a + b) = Cos\,a\;Cos\,b - Sin\,a\;Sin\,b$$

ist, obigen unter der Wurzel stehenden Ausdruck.

Zur Bestimmung des Winkels β, da die Tangente dieses Winkels dem Quotienten aus der vertikalen Seitenkraft der Kraft P in ihre horizontale Seitenkraft gleich ist, dient die Gleichung

$$Tang\,\beta = \frac{T\,Cos\,\alpha - R\,Cos\,w.}{T\,Sin\,\alpha + R\,Sin\,w.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Hat man β früher als P bestimmt, so findet man die Grösse dieser Kraft auf einfacherem Wege aus der Gleichung

$$P = T\,\frac{Sin\,(\alpha + w)}{Cos\,(w - \beta)},$$

welche durch unmittelbare Betrachtung des Kräftenparallelogramms $EGFL$, in welchem der Winkel

$$GFL = \alpha + w,$$

und der Winkel

$$GLF = 90 - (w - \beta)$$

ist, erhalten wird.

54. Wenden wir das bisher Gesagte auf die im 34. Artikel besprochene Brücke an, indem wir annehmen, dass ihre Spannketten unter einem Winkel von 30 Graden von der Horizontalen abweichen. Ihre Tragketten, da für diese

$$tang\,\varepsilon = \frac{40}{150} = 0{\cdot}2666$$

gefunden wird, bilden mit dem Horizonte einen Winkel von 14 Grad 56 Minuten.

Ruhen nun die Ketten auf einfachen, vertikal stehenden, leicht beweglichen Stützen, so beläuft sich die Spannung der Spannketten im Zustande des Gleichgewichtes des ganzen Systems zur Zeit der gröstmöglichen zufälligen Belastung der Bahn nach der Gleichung (53) auf

$$R = 2{,}091{,}488 \,.\, 1{\cdot}1157021 = 2{,}333{,}477 \text{ Pfund.}$$

Werden die Ketten dagegen über, aus gemischtem Mauerwerke herzustellende Pfeiler weggeführt, welche von den Widerlagern aufwärts bis zum Aufhängepunkte der Ketten 24 Schuh hoch, hier 12 Schuh lang, und 48 Schuh breit sind, und dabei ihrer Länge nach am Fusse $\frac{1}{12}$ der Höhe als Ausladung erhalten, deren absolutes Gewicht ferner für den Kubikschuh 100 Pfund beträgt, deren Körper endlich in Ansehung der, für die Durchfahrt bestimmten Thore und anderer leeren Räume der Breite nach nur zu zwei Drittheilen voll in Rechnung gebracht werden darf, so erhält man durch Einführung der, den einzelnen Grössen zukommenden Werthe in der Gleichung (62)

$$R = 38{,}820{,}892 : 27 \cdot 7846096 = 1{,}397{,}208 \text{ Pfund,}$$

und es muss die Elastizität des Mauerwerks gross genug sein, um, wenn die Spannkettenspannung, welche vor der Belastung der Tragketten statt hatte, bis zu jener Grenze gesteigert wird, welche wir eben gefunden haben, die zu diesem Ende erforderliche Vorwärtsneigung der Pfeiler gefahrlos erleiden zu können; den Spannketten selbst aber muss ein, der eben berechneten Spannung entsprechender Querschnitt gegeben werden.

55. Wir haben bisher die Ketten als auf dem Scheitel der Pfeiler mit diesen unzertrennbar verbunden, vorausgesetzt. Nehmen wir jetzt an, dass die Ketten auf dem Scheitel der Pfeiler, je nachdem ihre Spannung in den Tragketten oder in den Spannketten überwiegend ist, über ein. beide Ketten berührendes Kreissegment hin und her gleiten können. Dieses Gleiten kann nicht ohne einen bald grössern, bald kleinern Reibungswiderstand zu überwinden, vor sich gehen: ein Widerstand, welcher daher auf jene Spannung Einfluss hat, welche sich in den Spannketten, als Folge der Tragkettenspannung erzeugt.

Wäre dieser Reibungswiderstand gleich *Null*, so ist einleuchtend, dass sich die in den Aufhängepunkten der Tragketten stattfindende tangentiale Spannung ganz auf die Spannketten übertragen, und daher ein Gleiten derselben gegen die Bahn hin so lange statt haben würde, bis die, der eben erwähnten tangentialen Spannung gleich gewordene Spannkettenspannung ein weiteres Gleiten nicht mehr zulässt. Eben so ist klar, dass, wenn eine solche Gleichgewichtsherstellung zur Zeit der grösstmöglichen zufälligen Belastung der Bahn vor sich gegangen ist, die Ketten nach der entgegengesetzten Richtung sich bewegen werden, sobald eine Entlastung der Bahn von den zufälligen Lasten die tangentiale Spannung der Tragketten in den Aufhängepunkten abnehmen macht, und zwar so lange, bis die Spannkettenspannung in Folge der Zunahme der Pfeilhöhe dieser Ketten so weit abgenommen hat, dass sie der, der beständigen Belastung der Tragketten entsprechenden tangentialen Spannung in den Aufhängepunkten gleich geworden ist.

Findet unter der Voraussetzung, dass der Reibungswiderstand gleich Null sei, der Zustand des Gleichgewichtes statt, und bezeichnen R und T jene Grössen, welche bisher dadurch vorgestellt wurden, so ist also vorerst:

$$R = T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Werden diese beiden Spannungen in vertikale und horizontale Seitenkräfte zerlegt, so stellt, beider Ketten freihängende Anfangspunkte, wie bisher, als gleich hoch liegend angenommen,

$$T\,(Cos\,\alpha - Cos\,w) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

den Unterschied der letzteren, also die Grösse jener Kraft vor, mit welcher die Pfeiler in den Aufhängepunkten horizontal gegen die Bahn hin in Anspruch genommen werden: dagegen wird der vertikale Druck, welchen der Pfeiler erleidet, oder die Summe der beiden vertikalen Seitenkräfte jener Spannungen ausgedrückt durch

$$T\,(Sin\,\alpha + Sin\,w) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

zwei Gleichungen, deren Werth um so kleiner wird, je mehr der Winkel w dem Winkel α sich nähert, dessen Werth man ihn übrigens nur selten wird erreichen lassen können.

Damit endlich die Stabilität der Pfeiler gesichert sei, ist mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen erforderlich, dass der Gleichung

$$T\,[\,h\,(Cos\,\alpha - Cos\,w) - (nh + l)\,Sin\,w - nh\,Sin\,\alpha\,] =$$

$$= \left(\frac{l}{2} + nh\right)(l + nh)\,bhg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Genüge geschehe, indem es wieder die Achse B ist, auf welche die statischen Momente der auf die Erhaltung und den Umsturz der Pfeiler wirkenden Kräfte bezogen werden müssen. Eine Gleichung, aus welcher, sobald alle übrigen Grössen gegeben sind, die für den Zustand des Gleichgewichtes erforderliche Pfeilerlänge l in jedem speziellen Falle leicht zu ermitteln ist.

56. Hat man in dem in Rede stehenden Falle eine beliebige Konstruktion der Pfeiler vorläufig entworfen, und will man sich blos überzeugen, ob dieselben nicht in Gefahr stehen durch den Zug der Ketten umgestürzt zu werden, ohne von der letztaufgestellten Gleichung Gebrauch machen zu wollen, so wird hiezu genügen, dass man die Richtung der aus den Spannungen R und T hervorgehenden Mittelkraft GL, *Fig.* 16, ermittle, wornach man, sobald diese in ihrer Verlängerung noch innerhalb der Pfeilerbasis fortgeht, ohne weiterer Untersuchung über die zureichende Stabilität der Pfeiler wird gesichert sein können. Da aber der Winkel, den diese Mittelkraft mit der durch G gezogenen Vertikalen einschliesst, durch

$$\frac{w - \alpha}{2}$$

ausgedrückt wird, ihre Richtungslinie nämlich den Winkel EGF, den beide Spannungen R und T mit einander bilden, halbirt, so wird die in Rede stehende Frage in jedem speziellen Falle, sobald man die Richtungen beider Kräfte R und T bis zu ihrem Durchschnittspunkte G verlängert hat, leicht zu beantworten sein.

Geht aber die Richtung dieser Kraft ausserhalb der Pfeilergrundfläche

an dem Drehungspunkte B vorbei, so muss für den Zustand einer gesicherten Stabilität der Pfeiler das statische Moment dieser durch

$$P = T\sqrt{2\,[1-Cos\,(\alpha+\omega)]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

gegebenen Mittelkraft grösser oder mindestens gleich sein dem auf dieselbe Achse B bezogenen statischen Momente des Pfeilergewichtes.

Die für P aufgestellte letzte Gleichung findet man, indem man sich wieder erinnert, dass dieselbe die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der in dem Durchschnittspunkte G aus den Tragketten- und Spannketten-Spannungen sich ergebenden, durch die Gleichungen (67) und (68) ausgedrückten horizontalen und vertikalen Pressungen und allgemein

$$Sin^2 a + Cos^2 a = 1.$$

$$Cos\,(a+b) = Cos\,a\;Cos\,b - Sin\,a\;Sin\,b$$

ist; oder aber, indem man in der Gleichung (63) $R = T$ setzt. Wird $\alpha = \omega$ gemacht, so geht die letzte Gleichung, da allgemein

$$Sin\,a = \sqrt{\frac{1-Cos\,2a}{2}}$$

ist, über in

$$P = 2T\,Sin\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

und die Richtung dieser Kraft geht in der Mitte des Pfeilers vertikal herab; sie stellt also zugleich den vertikalen Druck vor, welchen der Pfeiler bei obiger Annahme erleidet. Dasselbe Resultat wird durch unmittelbare Betrachtung der zerlegten Kettenspannungen, deren horizontale Seitenkräfte sich jetzt ganz aufheben, erhalten.

57. Ein ähnliches Gleiten der Ketten über die Pfeiler, wie wir es im 55. Art. besprochen haben, wird auch dann eintreten, wenn gleiche Ursachen, trotz der stattfindenden Reibung der Ketten auf den Pfeilern, hiezu Veranlassung geben, nur wird in diesem Falle die Spannung der Spannketten immer kleiner bleiben, als jene der Tragketten im Aufhängepunkte, indem die Wirkung dieser Reibung jener analog ist, welche bei einem um einen Cylinder geschlagenen Seile stattfindet, wo nämlich, den Cylinder als unbeweglich vorausgesetzt, eine oft sehr geringe Kraft einer viel grössern das Gleichgewicht zu halten vermag.

Um nun zu einem Ausdrucke zu gelangen, nach welchem wir die Grösse der zur Ueberwindung dieser Reibung erforderlichen Kraft werden berechnen können, sei CA, *Fig.* 17, der Halbmesser eines unbeweglichen Cylinders, um welchen ein von F bis E anliegendes, vollkommen biegsames Seil auf der einen Seite durch die Kraft R, auf der andern Seite durch die Kraft T in Bewegung gebracht werden will, aber wegen des Einflusses der Reibung unter der Einwirkung dieser beiden Kräfte, von welchen R kleiner als T sein mag, eben noch im Zustande des Gleichgewichtes sich befindet.

Denkt man sich nun den Bogen AE vorläufig möglichst klein, und bezeichnet man die Kraft, welche am Ende dieses möglichst kleinen Theiles der Kraft T das Gleichgewicht hält, mit R', so kann, so weit es sich blos um die Grösse des senkrechten Druckes handelt, welcher aus den Spannungen R' und T auf dieses kleine Theilchen hervorgeht, $R' = T$ angenommen werden. Verlängern wir daher die Richtungen dieser Kräfte, deren

Angriffspunkte A und E sind, bis in ihren Durchschnittspunkt B, und stellen wir, wie wir dies anstandslos thun können, durch AB und BE die Grösse dieser Kräfte vor, konstruiren wir ferner das Kräftenparallelogramm $ABED$, und bezeichnen wir den Winkel ACB mit β, so sind die Winkel

$$ABC = CBE = 90 - \beta$$
$$BAD = BED = 2\beta,$$

und in Erinnerung, dass sich in diesem Kräftenparallelogramme die Kräfte wie die Sinusse der gegenüberliegenden Winkeln verhalten, und dass allgemein

$$Sin\, 2\beta = 2 Sin\, \beta\ Cos\, \beta$$

ist, finden wir daher für die aus den Kräften AB und BE hervorgehende Mittelkraft M den Ausdruck

$$M = 2T Sin\, \beta.$$

Dieser Ausdruck stellt sonach jene Kraft vor, mit welcher das Seilelement AE an den Cylinder angedrückt wird, daher dieselbe mit dem Reibungs-Koeffizienten φ multiplizirt, die Grösse jener Kraft bedingt, welche zur Ueberwindung der Reibung des Seiles am Cylinder erforderlich ist, und man erhält die Grösse der Kraft R', welche am Ende des Elementes AE mit der Kraft T im Gleichgewichte sein wird, wenn man von dieser Kraft das letzterwähnte Produkt abzieht. Demnach ist

$$R' = T\ (1 - 2\varphi\ Sin\, \beta).$$

Auf ähnliche Art findet man für die Spannung R'', welche am Ende eines zweiten solchen Elementes der Kraft R', und somit auch der Spannung T das Gleichgewicht hält, den Ausdruck

$$R'' = R'\ (1 - 2\varphi\ Sin\, \beta)$$

oder, indem man statt R' den dafür durch die früher gefundene Gleichung bedingten Werth einführt,

$$R'' = T\ (1 - 2\varphi\ Sin\, \beta)^2$$

und so ist ferner

$$R''' = T\ (1 - 2\varphi\ Sin\, \beta)^3$$
$$R^{IV} = T\ (1 - 2\varphi\ Sin\, \beta)^4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

u. s. f.

Ist nun der Winkel ACE der n^{te} Theil des der Bogenlänge FE entsprechenden Winkels ECF, so wird endlich

$$R = T\ (1 - 2\varphi\ Sin\, \beta)^n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (72)$$

gefunden werden.

In dieser letzten Gleichung kann nun, wenn man sich anders den Winkel β klein genug, d. i. die Zahl n gross genug denkt, statt dem Sinus des Winkels β die diesem Winkel zugehörige Bogenlänge substituirt werden; nun ist, wenn wir diese, dem Sinus β gleichkommende Bogenlänge z nennen, für den Halbmesser 1,

$$z : \beta = \pi : 180$$

also

$$\varkappa = \frac{\pi\beta}{180}$$

wo $\pi = 3{\cdot}14159\ldots$ die bekannte Ludolphische Zahl bezeichnet. Dieser Werth von $\varkappa$ statt *Sin* β in die Gleichung (72) eingeführt, verwandelt dieselbe in

$$R = T\left(1 - \frac{\varphi\pi\beta}{90}\right)^n$$

in welcher β die Hälfte des in Graden ausgedrückten Winkels ACE ist. Bezeichnet man endlich die dem Winkel $ACE = 2\beta$ für den Halbmesser $AC = r$ entsprechende Bogenlänge AE mit s, so ist

$$s : 2\beta = r\pi : 180$$

mithin

$$\beta = \frac{90 . s}{r\pi}$$

substituirt man diesen Werth statt β in der letzten Gleichung, so geht dieselbe über in

$$R = \mathrm{T}\left(1 - \frac{\varphi s}{r}\right)^n \ldots\ldots\ldots (73)$$

worin sonach s den n^{ten} Theil der ganzen Bogenlänge, auf welcher eine Reibung des Seiles statt hat, φ den Reibungs-Koeffizienten, und r den Halbmesser des Cylinders darstellt.

Entwickelt man die in der Gleichung (73) angezeigte n^{te} Potenz, nach dem binomischen Lehrsatze, demgemäss

$$(a \pm b)^n = a^n \pm na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

ist, indem man

$$a = 1, \text{ und } b = \frac{\varphi s}{r}$$

setzt, so erhält man

$$R = T\left[1 - \frac{n\varphi s}{r} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{\varphi^2 s^2}{r^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ 2.3.} \cdot \frac{\varphi^3 s^3}{r^3} + \ldots\right]$$

Bezeichnen wir jetzt die ganze Länge des Bogens, auf welchem die Reibung zu überwinden ist, mit l, so ist

$$s = \frac{l}{n},$$

mithin bei erfolgender Substitution

$$R = T\left[1 - \frac{\varphi l}{r} + \frac{(n-1)}{1.2} \cdot \frac{\psi^2 l^2}{nr^2} - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3.} \cdot \frac{\varphi^3 l^3}{n^2 r^3} + \ldots\right]$$

Nun wird aber aus dieser und aus allen vorhergehenden Gleichungen, wie dies aus dem Vorgange der Ableitung einleuchtet, R um so genauer gefunden, je grösser man n annimmt: denkt man sich endlich n gross genug und anstandslos

n statt $(n-1)$
n^2 statt $(n-1)(n-2)$
n^3 statt $(n-1)(n-2)(n-3)$
u. s. f.

schreiben zu können, in welchem Falle die in der vorliegenden Ableitung enthaltenen Hypothesen von der Wahrheit nicht mehr abweichen, so erhalten wir endlich für die fragliche Kraft R die Gleichung

$$R = T\left[1 - \frac{\varphi l}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi l}{r}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\varphi l}{r}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{\varphi l}{r}\right)^4 - \ldots\right] \ldots (74)$$

Wie wenig übrigens diese letzte Gleichung von der ihr vorhergehenden verschieden sei, kann man dadurch leicht finden, dass man in jener n, wenn auch nur $= 1000$ setzt.

58. Um die letzte Gleichung in einen zur Berechnung der, mit Rücksicht auf den stattfindenden Reibungswiderstand, fraglichen Spannkettenspannung geeigneten Ausdruck umzuwandeln, müssen wir uns erinnern, dass wir annehmen, dass das Kreissegment AC, *Fig.* 18, auf welchem die Reibung der Ketten stattfindet, also konstruirt werde, dass es in den Punkten A und C mit den Kettenkurven eine gemeinschaftliche Tangente hat. Unter dieser Voraussetzung ist der Winkel COA, welchen die von A und C nach dem Mittelpunkte O des Kreissegmentes CA gezogenen Halbmesser mit einander einschliessen, offenbar $= (\alpha + w)$, und es ergibt sich für diese Bogenlänge AC, oder mit Rücksicht auf die dafür gewählte Bezeichnung

$$l = \frac{r\pi(\alpha + w)}{180};$$

substituiren wir diesen Werth statt l in der Gleichung (74), so erhalten wir zur Berechnung der fraglichen Spannkettenspannung die schicklichere Gleichung

$$R = T\left[1 - \frac{\varphi\pi\,(\alpha + w)}{180} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi\pi\,(\alpha + w)}{180}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\varphi\pi\,(\alpha + w)}{180}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{24}\left(\frac{\varphi\pi\,(\alpha + w)}{180}\right)^4 - \ldots\right] \ldots (75)$$

Eine Gleichung, bei deren Gebrauch man sich in der Ausübung für alle, bei dem Entwurfe der Kettenbrücken vorkommenden Fragen mit den darin enthaltenen vier ersten Reihegliedern, in den meisten Fällen aber schon mit den drei ersten Gliedern wird begnügen können, da dabei nicht nur φ, sondern auch $\frac{\pi\,(\alpha + w)}{180}$ Brüche zu sein pflegen.

Nehmen wir z. B. $\alpha = 15^0$, $w = 30^0$ und $\varphi = 0{\cdot}3$ an, so ist

$$\frac{\varphi\pi\,(\alpha + w)}{180} = \frac{3.14159.45}{180} \cdot 0{\cdot}3 = 0{\cdot}2356192$$

$$\left(\frac{\varphi\pi\,(\alpha + w)}{180}\right)^2 = \overline{0.2356192}^2 = 0{\cdot}0555161.$$

$$\left(\frac{\varphi\pi\,(\alpha + w)}{180}\right)^3 = \overline{0{\cdot}2356192}^3 = 0{\cdot}0130800$$

$$\left(\frac{\varphi\pi\,(\alpha + w)}{180}\right)^4 = \overline{0{\cdot}2356192}^4 = 0{\cdot}0030818$$

mithin wird nach obiger Gleichung

$$R = T\,[1 - 0{\cdot}2356192 + 0{\cdot}0277581 - 0{\cdot}0021800 + 0{\cdot}0001284] =$$
$$= 0{\cdot}7900873\ T;$$

und mit Vernachlässigung des fünften Gliedes

$= 0{\cdot}7899589\ T$

mit Vernachlässigung des vierten und fünften Gliedes aber

$= 0{\cdot}7921389\ T$

was für $T = 20{,}000{,}000$ Pfund nur einen Unterschied von beziehungsweise $-2{,}568$ Pfund und $+11{,}032$ Pfund gibt.

59. Wir ersehen aus diesen Untersuchungen, dass der Einfluss des aus der Reibung der Ketten auf den Pfeilern entstehenden Abgleitungswiderstandes, die Pfeiler als vollkommen unbeweglich vorausgesetzt, die Spannung der Tragketten nicht ganz, sondern bald mehr bald weniger gemindert, in die Spannketten übertreten lässt. In der angeführten Voraussetzung wird nämlich das Gleiten der Ketten über die Pfeiler nur so lange vor sich gehen, bis sich in den Spannketten die, durch die Gleichung (75) bedingte Spannung erzeugt hat; alsdann verhindert der durch diese Spannung und jene der Tragketten auf die Pfeiler ausgeübt werdende Druck in Folge des hieraus anwachsenden Reibungswiderstandes jede weitere Bewegung der Ketten über die Pfeiler. Auch leuchtet es von selbst ein, dass jene Unbeweglichkeit der Pfeiler vorausgesetzt, der Querschnitt der Spannketten gross genug ist, wenn er der nach der Gleichung (75) sich ergebenden Spannung R entsprechend angeordnet wird. Endlich ist aber klar, dass selbst alsdann, wenn sich in den Spannketten jene durch die Gleichung (75) bedingt werdende Spannung nicht allein durch das Gleiten der Ketten über die Pfeiler, sondern unter Einem durch das gleichzeitig erfolgende, wegen der natürlichen Elastizität der Pfeilerbestandtheile zu verhindern unmögliche Vorwärtsneigen der Pfeiler erzeugt, das Gleiten der Ketten nach vorwärts aufhören wird, sobald die Spannkettenspannung diese Grenze erreicht hat. Die durch die Gleichung (75) bedingte Spannung der Spannketten wird daher in denselben bei einerlei Reibungs-Koeffizienten sich immer erzeugen, wie stark oder wie schwach man die Pfeiler auch immer anlegen mag, wenn sie nur überhaupt Stabilität genug haben, um der Gefahr des Umsturzes unter dem Einflusse der Tragkettenspannung nicht unterworfen zu sein; im entgegengesetzten Falle kann jene Spannung hingegen noch höher anwachsen, wie wir dies im nachfolgenden Artikel umständlicher besprechen werden.

Der horizontale Zug, welcher alsdann, wenn in den Spannketten die durch die Gleichung (75) bedingte Spannung bereits eingetreten ist, nach der Bahnseite im Aufhängepunkte statt hat, und der vertikale Druck, welchen die Pfeiler alsdann zu erleiden haben, so wie die Richtung und Grösse der, aus der so ermittelten Spannung R und der in den Tragketten stattfindenden Spannung T hervorgehenden Mittelkraft wird nach den, im 52. und 53. Art. abgeleiteten Gleichungen (60), (61) und (63) berechnet werden können, indem man darin statt R die durch die Gleichung (75) gefundene Spannkettenspannung einführt.

Zur Berechnung der Pfeilerstärke, resp. ihrer Länge, wenn die übrigen Grössen bedingt worden sind, aber wird man sich der Gleichung (62) des 52. Art. bedienen, indem man darin ebenfalls statt R die in den Spannketten in Folge des Einflusses der Reibung nach der Gleichung (75) vorauszusehende Spannung einführt.

Beiläufig muss auch bemerkt werden, dass man bei der Berechnung von *R* für letzteren Zweck den Reibungs-Koeffizienten immer lieber zu gross als zu klein in Rechnung ziehen soll, da eine um so grössere Standfestigkeit der Pfeiler erforderlich ist, je kleiner die Spannung erhalten wird, die sich in den Spannketten erzeugen kann; dagegen wird man bei der Berechnung von *R*, um hiernach den Spannkettenquerschnitt festzusetzen, den Reibungs-Koeffizienten lieber zu klein als zu gross einzuführen haben, wofür der Grund für sich einleuchtet.

Endlich wird die Untersuchung, ob die, für eine auf die angedeutete Art abgeleitete Spannung der Spannketten willkürlich getroffene Anordnung der Pfeiler die erforderliche Sicherheit gewähre, auf dem, im 53. Art. angezeigten Wege mit Berücksichtigung dieser Spannkettenspannung zu geschehen haben; obwohl klar ist, dass das statische Moment der Mittelkraft *P* aus *R* und *T* in Bezug auf die Drehungsachse *B*, *Fig.* 16, in allen Fällen der Summe der statischen Momente der, aus den sie erzeugenden Spannungen abgeleiteten horizontalen und vertikalen Seitenkräften gleich, so wie der für jenes statische Moment sich ergebende Ausdruck mit der Summe der statischen Momente der in *C* und *A* unmittelbar als angreifend betrachteten Kräfte *R* und *T* identisch sein muss, und daher auch diese statt jenem in Betrachtung gezogen werden können.

Wird bei der, auf die eine oder auf die andere Art vorgenommenen Berechnung und Vergleichung die Stabilität der Pfeiler zu gering befunden, um unter der Einwirkung der Spannung *T* und der sich nach der Gleichung (75) ergebenden Spannkettenspannung *R* der Gefahr des Umsturzes der Pfeiler, oder jener einer Ueberschreitung der bedingten Spannkettenspannung nicht ausgesetzt zu sein, so muss entweder der Querschnitt der Spannketten so weit vermehrt werden, als diess nach Art. 52 erforderlich wird, oder aber die Stabilität der Pfeiler durch Vergrösserung ihrer Dimensionen so weit gesteigert werden, als diess ebenfalls nach Art. 52 als nothwendig sich erweist.

60. Weil aber bei zu geringer Stabilität der Pfeiler und obwohl hinreichend starken Spannketten, um jede noch so grosse Spannung ertragen zu können, ihr Umstürzen in dem in Rede stehenden Falle, da sie in ihrem Scheitel mit den Ketten nicht unzertrennbar verbunden sind, dennoch denkbar ist, indem ein Abgleiten des Pfeilers an der Kettenkurve bei einer erfolgenden drehenden Bewegung um die Achse *B*, *Fig.* 16, ohne dass die Spannketten zu reissen brauchen, vor sich gehen kann; so ist es von besonderer Wichtigkeit, jene Spannnng zu wissen, welche in dem Augenblicke, also auch kurz vorher in den Spannketten statt hat, wo der Pfeiler auf dem Punkte steht, an den Ketten abgleitend umzustürzen.

Die Spannung der Spannketten wird nämlich von da an über die durch die Gleichung (75) bestimmte Grenze zu wachsen anfangen, wo, ohne dass ein Abgleiten des Pfeilers an den Ketten vor sich geht, die stattfindende Reibung bei zu geringer Stabilität der Pfeiler die Endpunkte *C* der Spannketten gleichzeitig mit dem Scheitel der Pfeiler nach der Bahnseite hin sich zu bewegen veranlasst, wenn gleich die Spannkettenspannung durch das

bis dahin stattgehabte Gleiten der Ketten und Neigen der Pfeiler die durch die Gleichung (75) bedingte Grösse schon erreicht hatte. Tritt endlich das Abgleiten der Pfeiler an den Ketten ein, so war in- und vor diesem Augenblicke die Kraft, welche das Abgleiten des Pfeilers an dem Kettenstück *CA* bewirkt hat, wenn wir uns dieselbe als eine in dem Punkte *A* tangential an *AC* den Pfeiler von *A* nach *F* hin ziehende Kraft vorstellen, offenbar eben so gross als jene Kraft ist, welche erforderlich gewesen wäre, um in jenem Augenblicke bei vollkommener Unbeweglichkeit des Pfeilers die Kette *NCAM* gegen *N* hin abgleiten zu machen.

Um aber dieses zu bewirken, müsste in den Spannketten eine Spannung R statt haben, welche nicht nur die Kraft T, sondern auch den, durch beide Spannungen R und *T* erzeugt werdenden Reibungswiderstand zu überwinden im Stande ist. In dem Augenblicke, wo zwischen diesen Kräften noch das Gleichgewicht stattgefunden hat, ist also nach Art. 57.

$$T = R\ (1-2\ \varphi\ Sin\ \beta)^n$$

mithin

$$R = \frac{T}{(1-2\ \varphi\ Sin\ \beta)^n}$$

oder nach Art. 57 und Art. 58 und nach geschehener Division

$$R = T\left[1 + \frac{\varphi\pi\ (\alpha + w)}{180} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi\pi\ (\alpha + w)}{180}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\varphi\pi\ (\alpha + w)}{180}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{24}\left(\frac{\varphi\pi\ (\alpha + w)}{180}\right)^4 + \ldots\right] \ldots \quad (76)$$

gewesen: so gross ist denn auch wirklich vor dem Augenblicke des Abgleitens der Pfeiler an den Ketten die Spannung der Spannketten; wenn wir uns daher bei *N* ein über eine Rolle ohne Reibung herablaufendes Gewicht angehängt denken, welches kleiner als die durch die letzte Gleichung für die Spannkettenspannung bedingt werdende Kraft ist, und dabei von dem eigenen Gewichte der Spannketten absehen, so wird in dem Augenblicke des allenfalls wirklich erfolgenden, aber offenbar durch die Spannung *T* zu bewirken nicht möglichen Umsturzes der Pfeiler kein Abgleiten der Ketten eintreten, sondern der vorhandene Reibungswiderstand die Ketten sammt dem angehängten Gewichte mit fortreissen.

Werden also die Spannketten stark genug gemacht, um der durch die Gleichung (76) bedingt werdenden Spannung gefahrlos ausgesetzt werden zu können, so ist es für die Pfeiler, um nicht umgeworfen werden zu können, hinreichend, wenn ihre Dimensionen von der Art sind, dass der Gleichung (62) Art. (52) mit Einführung dieser Spannkettenspannung Genüge geschieht; vorausgesetzt, dass man es übrigens bis auf diesen äussersten Fall will ankommen lassen. Mindestens wird man in einem solchen Falle bei der Berechnung von *R* den Reibungs-Koeffizienten möglichst gross einführen, sofern es sich um die Ermittlung des Spannkettenquerschnittes handelt, dagegen wird man ihn bei der Berechnung von *R* möglichst klein annehmen, so weit das Ergebniss zur Berechnung der erforderlichen Pfeilerdimensionen nothwendig ist.

61. Es kann sich hiebei ereignen, dass, indem man auf den im vor-

hergehenden Artikel angezeigten Wege die erforderliche Pfeilerlänge berechnet, hiefür *Null*, oder ein negativer Werth gefunden wird. Ersteres wird der Fall sein, wenn die nach der Formel (76) berechnete Spannkettenspannung jener gleich kommt, welche nach Art. (48) bei einfachen, leicht beweglichen Stützen für den Zustand des Gleichgewichtes erforderlich ist, wenn nur anders die Böschung gleich *Null* ist, oder dieselben mit durchgehends vertikalen Seitenflächen aufgeführt sind; wo nicht, so wird l noch früher als sich die durch die Gleichung (53) bedingte Spannung in den Spannketten erzeugt hat, gleich *Null* gefunden werden, weil dann das dreiseitige Prisma, dessen Basis $2nh$ zur Länge, und b zur Breite hat, dessen Höhe endlich gleich h ist, durch die ihm zukommende Stabilität jene Spannkettenspannung für den Zustand des Gleichgewichtes nicht ganz nothwendig macht, und es handelt sich, wenn $l = o$ gefunden wird, nur darum, dass die Pfeilerreibung noch den nothwendigen Abgleitungswiderstand leiste, und die Pfeiler gegen das Zusammendrücken gesichert werden.

Ein negativer Werth wird für l sich ergeben, wenn die nach der Gleichung (76) berechnete Spannung der Spannketten grösser ist, als sie durch die Gleichung (53) bedingt wird, sofern wieder die Pfeiler ausserdem noch ohne Böschung aufgeführt gedacht werden; denn da der Zustand des Gleichgewichtes bei der, durch die Gleichung (53) gegebenen Spannkettenspannung eintritt auch wenn die Pfeiler gar keine eigene Standfestigkeit haben einerseits, und andererseits der auf der Pfeilerkurve AC statthabende Reibungswiderstand bis zu jenem Augenblicke so wirkt, als ob die Ketten mit dem Pfeiler unzertrennbar verbunden wären, in welchem R die durch die Gleichung (76) bedingte Grenze erreicht hat, so müsste, um die Spannkettenspannung dennoch bis zu dieser Grenze anwachsen zu machen, eine fremde Ursache auf eine weitere Bewegung oder den Umsturz des Pfeilers einwirken; eine solche wäre alsdann vorhanden, wenn l negativ gemacht, d. i. der Pfeiler nach vorne so weit überhängend gebaut würde, dass sein nicht mehr unterstützter Schwerpunkt, nebst der Spannung der Tragketten, auf dessen Umsturz einwirkte.

Für gegebene Pfeilerdimensionen wird die Grenze, bis zu der R anwächst, wenn die Pfeiler die erforderlichen Dimensionen nicht haben, um der Gleichung (62) mit Einführung von R, wie es durch die Gleichung (75) bedingt ist, Genüge zu leisten, berechnet werden können, indem man aus jener Gleichung (62) R für die gegebenen Dimensionen berechnet, und es ist für den Zustand des gesicherten Gleichgewichtes blos erforderlich, dass diese so gefundene Spannung kleiner sei, als sie nach der Gleichung (76) vorauszusehen ist, indem diese kleinere Spannung sich durch das Vorwärtsneigen der Pfeiler jedenfalls erzeugen wird; der Kettenquerschnitt aber muss natürlicher Weise ebenfalls dieser zu gewärtigenden Spannung entsprechend angeordnet werden.

62. Was endlich die, bei dem Wachsen der Spannung der Spannketten, theils wegen ihrer Dehnbarkeit, theils wegen ihrer Beugung unvermeidliche Neigung der Pfeiler, so wie das, aus eben diesen Ursachen mögliche Gleiten der Ketten über die Pfeiler betrifft, so ist das Mass dieser Erscheinungen, so weit sie Folge der Dehnbarkeit des Materials sind, aus dem die Ketten be-

stehen, sobald nur diese Dehnbarkeit unter bestimmten Umständen bekannt ist, leicht zu ermitteln. In der That werden die Ketten um eben so viel von der einen nach der andern Seite gleiten, und sonach um eben so viel die Länge der Tragketten vergrössern, als die Spannketten in Folge ihrer Dehnbarkeit an Länge zunehmen. Die horizontale Ortsveränderung hingegen, welche einer berechneten Verlängerung der Spannketten entspricht, wird, so lange ihr Neigungswinkel w nicht gross ist, sehr nahe gefunden, indem man die Spannkettenverlängerung durch $Cos\ w$ dividirt. Stellt nämlich AB, *Fig.* 19, die ursprünglichen, AC die verlängerten Spannketten, DC die Spannkettenverlängerung, und BC die horizontale Ortsverschiebung vor, so kann der Winkel BCD dem ursprünglichen Neigungswinkel EBC der Spannketten gleich, und das Dreieck BDC als ein bei D rechtwinklichtes angenommen werden, in welchem Falle sich dann hieraus

$$d = \frac{nl}{Cos\ w}$$

ergibt, wenn die fragliche horizontale Ortsverschiebung mit d, die Länge der Spannketten mit l, und ihre Verlängerung mit nl bezeichnet wird. Genauer wird diese horizontale Ortsveränderung BC aus dem dieselbe bedingenden Dreiecke ABC, in welchem zwei Seiten und der der grössern Seite gegenüberliegende Winkel, wie wir sehen, bekannt sind, mit

$$d = \frac{l\ (1 + n)\ Sin\ (w - a)}{Sin\ w}$$

gefunden, in dieser Gleichung bezeichnet übrigens a den, der kleineren der beiden gegebenen Seiten gegenüberliegenden Winkel BCA; derselbe ist gegeben durch die Gleichung

$$Sin\ a = \frac{Sin\ w}{1+n}.$$

Nun ist es für sich einleuchtend, dass bei der Berechnung der Pfeilhöhe, welche die Tragketten bei ihrer, unter den, im 40. und 42. Art. besprochenen Umständen zunehmenden Länge annehmen, auch noch auf ihre, durch die Verlängerung der Spannketten und ihr Gleiten über die Pfeiler erwachsende Verlängerung nach der aus jenen Artikeln an und für sich hervorgehenden Weise Rücksicht genommen werden muss; so wie, dass es obige, wegen der Dehnbarkeit der Ketten mögliche horizontale Ortsverschiebung der Aufhängepunkte der Ketten ist, welche bei der, nach Art. (43) zu berechnenden Pfeilhöheveränderung in Rechnung zu ziehen ist.

Der Einfluss der Spannkettenbeugung auf die in Rede stehenden Veränderungen aber wird im siebenten Abschnitte umständlich besprochen werden.

Sechster Abschnitt.

Einfluss vertikaler Spannketten auf den detrusiven und statischen Widerstand der Pfeiler, und Einfluss vertikaler und geneigter Spannketten auf die Wurzelbefestigung dieser Ketten.

---

63. Treten die Spannketten *CR*, *Fig.* 20, von dem, diese und die Tragketten *AM* berührenden Kreissegmente *CBA* vertikal in den Boden, so ist für eine solche Anordnung der Winkel

$$w = 90 \text{ Grad},$$

mithin, wenn wir wieder annehmen, dass das Gleiten der Ketten nicht ohne bedeutenden Reibungswiderstand von *C* gegen *A* hin, stattfinden könne, die Spannung der Spannketten oder

$$R = T\left[1 - \frac{\varphi\pi\,(90+\alpha)}{180} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi\pi\,(90+\alpha)}{180}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\varphi\pi\,(90+\alpha)}{180}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{\varphi\pi\,(90+\alpha)}{180}\right)^4 - \ldots\right] \ldots \quad (77)$$

welche Gleichung, wie für sich klar, aus der Gleichung (75) sich ergibt, indem man darin $w = 90$ setzt.

Werden die in *A* und *C* stattfindenden Spannungen bis zu ihrem Durchschnittspunkte *H* verlängert, und ist *HJ* die Richtung der aus beiden Kräften hervorgehenden Mittelkraft, so wird der Winkel $NHJ = \beta$, welchen diese Kraft mit der vertikalen *HN* einschliesst, aus der Gleichung (64) Art. (53) abgeleitet werden können; in der That wird statt derselben für den vorliegenden Fall, da

$$Cos\ 90^0 = 0, \text{ und } Sin\ 90^0 = 1$$

ist,

$$tang\,\beta = \frac{T\,Cos\,\alpha}{R + T\,Sin\,\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

gefunden.

Ferner findet man, indem man in der Gleichung (63) den Winkel $w = 90$ setzt, da

$$-\ Cos\ (90 + \alpha) = Cos\ (90 - \alpha) = Sin\ \alpha$$

ist, für die Grösse der Mittelkraft aus *R* und *T*, den Ausdruck:

$$P = \sqrt{[T^2 + 2RT\,Sin\,\alpha + R^2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (79)$$

Für den vertikalen Druck, welchen der Pfeiler erleidet, ergibt sich aus der Gleichung (61), indem man darin $\omega = 90^0$ setzt, so wie durch unmittelbare Betrachtung der wirkenden Kräfte, der Ausdruck:

$$R + T\,Sin\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

endlich ist, wie diess auf gleichem Wege gefunden wird, die Kraft, mit welcher der Pfeiler durch die, von B bis C anliegenden Ketten horizontal gegen die Bahn hin, gedrückt wird, gegeben durch

$$T\,Cos\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

64. Die Betrachtung der vorliegenden Anordnung und des bedeutenden horizontalen Schubes, der nach der letzten Formel bei also vertikal angelegten Spannketten stattfindet, indem er der ganzen horizontalen Spannung der Tragketten gleich kommt, führt uns darauf, dass hierbei, wenn auch geradezu kein Umstürzen des Pfeilers, so doch ein Abgleiten seines obern, dem Schube ausgesetzten Theiles $CBAV$ über den untern $NCVS$, und wenn CV der Widerlagsoberfläche PS nahe genug liegt, ein Abschieben des ganzen Pfeilers von den Widerlagern wohl noch erfolgen könne. Es ist zwar ein solches Abschieben der letzten Pfeilerschichten über einander auch bei jenen Anordnungen möglich, die Gegenstand der Untersuchungen des vorigen Abschnittes waren; aber dort ist diese Gefahr wegen des durch die Spannung der Spannketten zum Theil aufgehoben werdenden horizontalen Zuges der Tragketten und der bei wachsender Spannung letzterer leichter eintretenden Neigung der dort minder massiv nothwendigen Pfeiler so gering, dass es besonderer Betrachtungen darüber nicht bedurfte. Bei der jetzt in Rede stehenden Anordnung ist es aber vor Allem andern nöthig, die Standfestigkeit des Pfeilers aus diesem Gesichtspunkte zu prüfen, und fofort zu sehen, welches die Kräfte sind, durch die dieses Abschieben der Pfeiler verhindert werden soll.

Diese Kräfte sind der auf der Ebene, wo die Trennung und respektive das Abgleiten erfolgt, stattfindende Reibungswiderstand und die Adhäsionskraft des Pfeilers an dieser Ebene. Ersterer ist durch die Grösse des auf diese Abgleitungsebene ausgeübt werdenden vertikalen Druckes, und den zugehörigen Reibungs-Koeffizienten; letztere durch das Flächenmass dieser Ebene und die Adhäsionskraft der Flächeneinheit bedingt. Nehmen wir nun an, das Abschieben des Pfeilers finde in der, durch CV gelegt gedachten horizontalen Ebene statt, und bezeichnen wir die Höhe des Pfeilers von dieser Abgleitungsebene CV aufwärts mit h, seine Breite mit b, seine obere Länge mit l, endlich das absolute Gewicht seiner körperlichen Einheit mit g; für diese Bezeichnungen, und indem wir von den Pfeilerböschungen, da sie auf die bevorstehende Untersuchung nur sehr geringen Einfluss haben, ganz absehen, stellt

$$R + T\,Sin\,\alpha + blhg$$

den auf die Abgleitungsebene ausgeübt werdenden vertikalen Druck vor, daher, wenn η den Reibungs-Koeffizienten für die Pfeilerbestandtheile bezeichnet, durch

$$(R + T\,Sin\,\alpha + blhg)\,\eta$$

die Grösse der zur Ueberwindung des auf der Abgleitungsebene stattfindenden

Reibungswiderstandes erforderlichen Kraft ausgedrückt wird. Ist ferner die Adhäsionskraft der Pfeilerbestandtheile für die Einheit des horizontalen Querschnittes gleich q, so drückt

$$blq$$

die Kohäsionskraft des ganzen Pfeilers aus.

Soll sonach das Gleichgewicht zwischen den auf das Abschieben und das Bestehen des Pfeilers wirkenden Kräften stattfinden, so muss der Gleichung

$$(R + T\,Sin\,\alpha + blhg)\,\eta + blq = T\,Cos\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

Genüge geschehen: ist sonach bei einer entworfenen Konstruktion der Pfeiler der erste Theil dieser Gleichung grösser als der zweite, so ist die Gefahr des Abschiebens in dem Masse entfernter als der Unterschied beider Theile grösser ist.

65. Um die letzte Gleichung in eine andere zu verwandeln, aus welcher für eine berechnete Tragketten- und Spannkettenspannung der für den Zustand des in Rede stehenden Gleichgewichtes erforderliche Gewölbshalbmesser $AO = r$ bei bedingter Höhe und Breite der Pfeiler ermittelt werden kann, wollen wir von dem sowohl über, als rückwärts der Ketten befindlichen Theilen der Pfeiler ganz absehen, indem hierdurch die Rechnung bedeutend vereinfacht, und das Gleichgewicht um so mehr sichernde Resultate erhalten werden.

Für eine solche Annahme ist.

$$br^2\,(1 + Sin\,\alpha)\,g,$$

das Gewicht des über der Abgleitungsebene befindlichen Mauerwerkes, und

$$br\,(1 + Sin\,\alpha)$$

die Grösse der Fläche, in welcher das Abgleiten vor sich geht, und es muss für den Gleichgewichtszustand der nachfolgenden, mit der obigen bedingungsweise identischen Gleichung

$$[R + T\,Sin\,\alpha + br^2(1 + Sin\,\alpha)\,g]\,\eta + br\,(1 + Sin\,\alpha)\,q = T\,Cos\,\alpha \quad . \quad . \quad (83)$$

Genüge geschehen; aus dieser Gleichung kann sonach für jeden gegebenen Fall der Halbmesser r berechnet werden.

Wie viel man von der ganzen Pfeilerbreite übrigens bei diesen Berechnungen statt b einzuführen haben wird, hängt auch hier von den darin für die Kommunikation leer stehenden Räumen ab;. eine Rücksicht, die vereinfacht wird, wenn die Pfeiler zu beiden Seiten des Zuganges oder der Zufahrt isolirt stehen.

66. Hat man zu befürchten, dass bei der in Rede stehenden Spannkettenanlage ein Abschieben nicht nur des einen Theiles, sondern des ganzen Pfeilers eintreten könne, so wird zur Prüfung, ob das nöthige Verhältniss der auf Zerstörung und Erhaltung der Pfeiler wirkenden Kräfte stattfinde, eben jene vorhin gefundene Gleichung (82) angewendet werden können, indem man darin für h die ganze Pfeilerhöhe einführt, vorausgesetzt nämlich, dass sie ihrer ganzen Höhe nach als voll angesehen werden können, widrigenfalls ein angemessener Theil der Höhe in Abschlag zu bringen sein würde.

Um jene Gleichung (82) für die letztbesprochene Befürchtung in eine Gleichung umzuwandeln, welche zur Bestimmung des Halbmessers $CA = r$ wird angewendet werden können, wird man darin blos $r\,(1 + Sin\,\alpha)$ statt

l zu setzen haben, wenn man wieder voraussetzt, dass die Spannketten so nahe an der Wand PQ herabgeführt werden, dass man von den, zwischen dieser Wand und den Spannketten befindlichen Pfeilertheilen ganz absehen kann. Sie geht alsdann über in

$$[R + T\,Sin\,\alpha + bhr\,(1 + Sin\,\alpha)\,g]\;T + br\,(1 + Sin\,\alpha)\,q = T\,Cos\,\alpha\;\ldots\;(84)$$

Bei der Anwendung dieser und der Gleichung (82) wird man meistentheils statt h nur die, von der beziehungsweisen Abgleitungsebene bis zu den Aufhängepunkten stattfindende Pfeilerhöhe einführen können.

67. Um sich, nachdem man auf dem bisher angezeigten Wege die Dimensionen des Pfeilers berechnet hat, welche derselbe erhalten muss, um dadurch jede Gefahr des Abschiebens beseitigt zu wissen, auch noch darüber Rechenschaft zu geben, ob er sofort auch gegen das Umstürzen hinlänglich gesichert ist, wird man blos zu untersuchen haben, ob das statische Moment des Pfeilergewichtes in Bezug auf die Drehungsachse S jenes der auf dieselbe Achse bezogenen Mittelkraft aus der Tragketten- und Spannkettenspannung, wie sie ihrer Grösse und Richtung nach aus den Gleichungen (79) und (78) Art. (63) gefunden wird, überwiege, oder demselben mindestens gleich sei. Eine Untersuchung, die aber nicht einmal nöthig ist, sobald aus der Gleichung (78) für β ein solcher Werth gefunden wird, dass die hiernach bedingt werdende Richtung jener Mittelkraft noch zwischen P und S die Pfeilerbasis trifft. Vernachlässigen wir wieder den zwischen der Wand PQ und den Spannketten befindlichen Theil der Pfeiler, so erhalten wir, indem wir $r\,(1 + Sin\,\alpha)$ statt l in der Gleichung (62) Art. (52) einführen, als zur Berechnung des Halbmessers r dienende Gleichung

$$Th\;Cos\,\alpha = nh\;T\,Sin\,\alpha + [nh + r\,(1 + Sin\,\alpha)]\;R + \\ + \left[\frac{r(1 + Sin\,\alpha)}{2} + nh\right][r(1 + Sin\,\alpha) + nh]\,bhg\;\ldots\;(85)$$

in welcher man statt h blos die zwischen dem Aufhängepunkte der Tragketten und der Pfeilergrundfläche befindliche Pfeilerhöhe in Rechnung ziehen darf.

Es ist übrigens kaum nothwendig, nochmals zu erinnern, dass man bei der Berechnung von R, um ja die der Standfestigkeit nachtheiligste Spannung hiefür zu erhalten, so weit es sich um die Ermittlung der nothwendigen Pfeilerdimensionen handelt, einen möglichst grossen Reibungs-Koeffizienten einführen müsse, während man auch hier umgekehrt den möglichst kleinen benannten Koeffizienten in Rechnung ziehen wird, wenn es sich um die Spannkettenspannung zum Behufe der Bemessung des Querschnittes dieser Ketten handelt.

Wäre der Reibungswiderstand so gering, dass man denselben gleich *Null* annehmen könnte, so findet das bisher über die in Rede stehende Spannkettenanlage und ihren Einfluss auf das Gleichgewicht des ganzen Systems Gesagte mit der Modifikation seine Anwendung, dass man überall $R = T$ setzen muss, da in einem solchen Falle die Spannung der Spannketten jener der Tragketten gleich ist.

68. Bei den bisherigen über das Abgleiten der Pfeiler angestellten Untersuchungen, sofern es bei vertikal von dem Pfeiler herablaufenden

Spannketten möglich ist, wurde davon abgesehen, dass hierbei unter gewissen Bedingungen auch ein Abgleiten des Pfeilers an der Kettenkurve vor sich gehen muss, und hiedurch dieses Abgleiten bedingungsweise auch mit erschwert wird, so weit es nicht ohne Reibung geschehen kann. Der Grund jenes Absehens liegt in der Ausdehnbarkeit der Ketten, kraft welcher sich die Spannketten, sobald ihre Spannung die durch die Gleichung (77) bedingte Grenze durch das Gleiten der Ketten über die Pfeilerkurve erreicht hat, bei einer, durch irgend eine neue Kraft weiter wachsenden Spannung, im Verhältnisse dieses Wachsens verlängern und so, sofern die Veranlassung hierzu der noch nicht zureichende detrusive Widerstand der Pfeiler ist, ohne das Abgleiten des Pfeilers an den Ketten nothwendig zu machen, ein mit den Pfeilern gleichzeitiges Vorwärtsbewegen derselben möglich machen werden.

Ein solches Wachsen der Spannkettenspannung geht aber bei dem erwähnten allfälligen Abschieben der Pfeiler nach Art. (60) bis zu jenem Augenblicke vor sich, in welchem diese bis zu der durch die Gleichung (76) bedingten Grenze angewachsen ist, wenn anders in Folge des gleichzeitig auf der Abgleitungsebene selbst, wegen des wachsenden vertikalen Druckes, wachsenden Reibungswiderstandes das Abgleiten der Pfeiler nicht schon früher aufgehört hat. Es ist nun zwar die bei einem solchen Wachsen der Spannkettenspannung stattfindende Verlängerung immerhin sehr gering; nicht so gering ist hingegen die horizontale Ortsveränderung, welche hierdurch in ihrem Anfangspunkte C möglich wird. In der That, bezeichnen wir die Länge der Spannketten von ihrem Aufhängepunkte C bis zu ihrem Befestigungspunkte B mit s, und nehmen wir an, dass sie aus dem vorhin angeführten Grunde um die Grösse ns sich verlängern, so wird hierdurch eine horizontale Ortsveränderung ihres Aufhängepunktes möglich, welche, mit z bezeichnet, gegeben ist durch

$$z = s\sqrt{n(2+n)}$$

wie diess durch die Betrachtung eines solchen Vorganges von selbst einleuchtet; es ist nämlich z sehr nahe eine Kathede eines rechtwinklichten Dreieckes, dessen andere Kathede s, oder die ursprüngliche, und dessen Hypothenuse $s(1+n)$ oder die neue Länge der Spannketten ist.

Diese selbst bei geringer Ausdehnung der Spannketten sehr bedeutend mögliche horizontale Ortsveränderung der Pfeiler, ehe die Spannketten eine, die durch das Gleiten der Ketten über die Pfeiler erzeugt gewesene, namhaft übersteigende Spannung erreichen, sofern eine solche erst das gänzliche Abgleiten verhindern soll, macht es daher einleuchtend, dass man auf diesem Reibungswiderstand bei der Ermittlung der für das Gleichgewicht nöthigen Pfeilerdimensionen keine Rücksicht nehmen dürfe.

Wäre dennoch eine solche horizontale Ortsveränderung ohne Gefahr zulässig gewesen, und in Rücksicht dessen der Pfeiler so schwach angeordnet worden, dass er sich bei eintretender Belastung der Tragketten schon so weit vorwärts schiebt, dass er auf dem Punkte stehet, auch an den Ketten abzugleiten, so ist alsdann die Spannung der Spannketten gegeben durch die Gleichung (76), in diesem Augenblicke ist aber auch der Reibungswiderstand zwischen den Ketten und dem Pfeiler nahe ganz über-

wunden. Wollte man daher die Pfeiler dieser Gefahr aussetzen, so wäre es zureichend, ihnen solche Dimensionen zu geben, wie sie die Gleichung (84) mit Einführung der nach der Gleichung (76) sich ergebenden Spannkettenspannung bedingt. Doch würde es rathsam sein, R alsdann mit Einführung eines möglichst kleinen Reibungskoeffizienten zu berechnen, so weit es sich um die Pfeilerdimensionen, denselben dagegen möglichst gross anzunehmen, sofern es sich um den, nach R zu bemessenden, den Spannketten für einen solchen Fall zu gebenden Querschnitt handelt.

Aus diesen Betrachtungen ersehen wir, dass die Reibung der Ketten auf den Pfeilern zwar einerseits die Grösse des vertikalen Druckes, welchen die Pfeiler erleiden, und somit den Abgleitungswiderstand an der Grundfläche derselben mindert, anderseits aber das gänzliche Abgleiten sehr erschwert, im Vergleiche mit jenen Anordnungen, bei welchen gar keine Reibung stattfindet; für diese kann nämlich R nie kleiner, aber auch nie grösser als T werden, und die für diesen Fall bei der in Rede stehenden Anlage vertikaler Spannketten erforderlichen Pfeilerdimensionen, um das Abschieben entfernt zu halten, findet man endlich, indem man, wie für sich klar ist, in den Gleichungen (82) (83) und (84), je nachdem man von einer oder der andern derselben Gebrauch zu machen, veranlasst wird, $R = T$ setzt.

69. Da endlich die Anwendung vertikaler Spannketten immer sehr starke Pfeiler erfordert, um gegen das Abschieben und Umstürzen derselben gesichert zu sein, so wird man dasselbe stets durch eiserne Schliessen erschweren, welche von der vordern Pfeilerfläche in die Widerlager hinabreichen; der Widerstand derselben ist für jeden speziellen Fall, sei es, dass sie das Abschieben, sei es, dass sie das Umstürzen erschweren sollen, nicht schwer in Rechnung zu bringen, daher hierüber keine besondern Untersuchungen nöthig sind. Im Allgemeinen wird nur bemerkt, dass, wenn eine Kraft k nothwendig ist, um das Zerreissen dieser unter einem Winkel a gegen den Horizont geneigten Schliessen zu bewirken, hierzu von der auf das Abschieben der Pfeiler wirkenden Kraft ein Theil erforderlich werde, dessen Grösse durch

$$\frac{k}{Cos\, a}$$

ausgedrückt wird; diese Kraft ist daher, sobald solche Schliessen eingelegt werden, in den Gleichungen (82), (83) und (84) zu den übrigen das Abschieben verhindernden Kräften hinzu zu addiren. Sofern aber diese Schliessen dem Umsturze mit entgegen wirken sollen, kommt zu den übrigen, die Stabilität der Pfeiler bedingenden statischen Momenten auch noch das, auf die gemeinschaftliche Drehungsachse bezogene statische Moment der zum Zerreissen der Schliessen erforderlichen Kraft k hinzu. Es versteht sich übrigens von selbst, dass der Winkel a klein genug sein muss, um nicht etwa statt des Reissens der Schliessen ihr Brechen befürchten zu dürfen.

70. Hat man durch die bisherigen Untersuchungen jene Pfeilerdimensionen ermittelt, welche jede Gefahr des Abschiebens oder Umstürzens der Pfeiler beseitigen, so wird man noch zu prüfen haben, ob denn auch die Pfeiler sammt den Widerlagern gegen letztere Gefahr gesichert sind. Für

ein solches Umstürzen wäre *E*, *Fig.* 20, die Achse, um welche die drehende Bewegung der Widerlager sammt dem Pfeiler erfolgen müsste. Man wird daher zu untersuchen haben, ob das auf diese Achse bezogene statische Moment der in dem Aufhängepunkte der Tragketten bei der grösstmöglichen zufälligen Belastung der Bahn eintretenden, nach der Gleichung (25), Art. (26) zu berechnenden tangentialen Spannung *T* genügend geringer ist, als das, auf dieselbe Achse bezogene statische Moment des Gewichtes der Pfeiler, des Gewichtes der Widerlager und derjenigen Kraft, welche zum Abschieben der Widerlager an den, mit ihren vertikalen Seitenwänden in Berührung stehenden Erdkörpern erforderlich wird.

Ist es möglich, der Spannkettenwurzel *U* eine von dem Gewichte der Pfeiler und Widerlager unabhängige Befestigung zu geben, wie diess z. B. thunlich wäre, wenn die Widerlager auf einem hinlänglich mächtigen Felsengrunde erbaut, und die Spannketten in diese Felsenmasse herabgeführt würden, so wäre, um das Umstürzen der Widerlager sammt dem Pfeiler unmöglich zu machen, es offenbar zureichend, wenn das auf die Drehungsachse *E* bezogene statische Moment der Mittelkraft aus *T* und *R* kleiner bliebe, als die Summe der vorhin erwähnten, diesem Umstürzen entgegenwirkenden übrigen statischen Momente. Vorläufig wird man in einem solchen Falle den Winkel β, welchen die Mittelkraft aus der Tragketten- und Spannkettenspannung mit der Vertikalen *GN* einschliesst, nach der Gleichung (78) Art. (63) berechnen; trifft diese Mittelkraft in ihrer Verlängerung noch die Widerlagsgrundfläche, so bedarf es natürlich keiner weitern Untersuchung, um über die Standfestigkeit der Widerlager und Pfeiler beruhigt sein zu können.

Alles übrige im vorigen Abschnitte über den Einfluss der Reibung auf die Standfestigkeit der Pfeiler Gesagte, findet endlich auch in Beziehung auf die in Rede stehende Anordnung vertikaler Spannketten seine Anwendung, und es muss nur noch bemerkt werden, dass, wie leicht einzusehen ist, die bei eintretender Belastung der Tragketten unvermeidliche, im vorigen Abschnitte umständlich besprochene Vorwärtsneigung der Pfeiler, indem sie auf eine Vergrösserung der Spannung der Spannketten wirkt, sobald nämlich diese gar nicht, oder nur mit Ueberwindung eines gegebenen Reibungswiderstandes über die Pfeiler weggleiten können, eine mindere, und mitunter vielleicht gar keine horizontale Ortsveränderung der Pfeiler nöthig macht, um den für den Zustand des Gleichgewichts bei früher zu geringem detrusiven Widerstande der Pfeiler nothwendigen grössern vertikalen Druck eintreten zu machen. Hierauf hat auch jene nicht vermeidliche Zusammendrückung der mit der Peripherie *CB* des Gewölbes *CBA* parallel laufenden Gewölbsfugen einen günstigen Einfluss, welche einer horizontalen Ortsverschiebung des ganzen Pfeilers analog auf eine Vergrösserung der Spannkettenspannung einwirkt, und dabei immer minder als diese Verschiebung zu scheuen sein wird; nur muss durch, über die Stirnfläche des Gewölbes laufende eiserne Schienen, und von da zurücktretende Schliessen jeder Gewölbstrennung vorgebeugt werden; wie denn überhaupt also zu konstruirende Pfeiler eine, im Vergleiche mit den im vorigen Abschnitte

besprochene, nicht nur vielseitigere theoretische Begründung, sondern auch sorgfältigere praktische Ausführung erheischen, um über ihren Bestand vollkommen beruhigt sein zu können.

71. Die in diesem Abschnitte bisher in Rede gewesene Konstruktionsweise erfordert endlich, dass die in die Widerlager herablaufenden und in diesen bei *U*, *Fig.* 20 befestigten Ketten, hier durch eine Kraft festgehalten werden, welche diejenige Spannung genügend überwiegt, die sich in den Spannketten nach den bisher darüber gepflogenen Untersuchungen äussersten Falles erzeugen kann. Nun geschieht aber das Befestigen der Spannketten im Allgemeinen dadurch, dass über den, durch die letzten Glieder dieser Ketten laufenden, sogenannten Wurzelbolzen, Eisenplatten gelegt werden, welche hinlänglich gross sind, um den Druck, welcher auf dieselben bei dem successiv eintretenden Gespanntwerden der Spannketten ausgeübt wird, auf über diesen Eisenplatten liegende grössere Steinblöcke, und durch diese hinwiederum auf noch grössere Theile des Widerlagermauerwerks fortzupflanzen, in der Art, dass die Spannung der Spannketten das Bestreben hat, aus dem gesammten Widerlagsmauerwerke eine umgekehrte abgestutzte Pyramide herauszureissen, deren kleinere Grundfläche die Platte *U*, oder die darauf liegenden grössern Werkstücke bilden, und deren obere Grundfläche irgend eine Linie *KL* zur Länge, und eine andere verhältnissmässige Linie zur Breite hat. Die Grösse dieser oberen Fläche wird wesentlich von der Art, wie die auf einander liegenden Mauerschichten immer weiter über einander greifen, abhängen.

Da es nun ausser der minder bedeutenden, zur Aufhebung der Kohäsionskraft des Bindungsmittels der einzelnen Schichten erforderlichen Kraft, nur das eigene Gewicht dieses herauszuhebenden Körpers und des darüber liegenden Pfeilerantheiles ist, welche der Spannung der Spannketten das Gleichgewicht halten, wenn kein Brechen der Steine, oder kein Abschieben ihrer Theile an einander längs der ganzen Ausdehnung der Seitenflächen der eben betrachteten umgestürzten Pyramide vor sich geht, so wird man zuerst aus der Verbindungsweise der einzelnen Mauerschichten die Grösse und das Gewicht dieses herauszuhebenden Körpers und des darüber liegenden Pfeilergewichtes, so wie die zur Aufhebung der Kohäsionskraft des Bindungsmittels erforderliche Kraft ermitteln, und sehen, ob dadurch die grösste in den Spannketten möglicher Weise eintretende Spannung genügend überwogen wird, um über die Unmöglichkeit eines solchen Heraushebens überzeugt sein zu können. Hat man sich hierüber überwiesen, so wird man auch noch zu prüfen haben, ob nicht etwa ein Herausreissen eines kleinern Theiles, z. B. eines Parallelepipedes, dessen Grundflächen jener der untersten Werkstücke gleich sind, dadurch möglich wird, dass durch die Spannkettenspannung nebst seinem eigenen Gewichte und dem, des darüber liegenden Pfeilerantheiles noch jene Kraft aufgehoben wird, welche durch die detrusive Festigkeit der Steine, aus welcher die Widerlager bestehen, bedingt ist. Endlich wird man auch noch zu untersuchen haben, ob der letzbesprochene Mauerkörper nicht noch leichter dadurch herausgehoben werde, dass man annimmt, dass, damit diess möglich sei, nebst dem

Gewichte der zu hebenden Körper die relative Festigkeit der Mauerbestandtheile längs der Losreissungsebene durch die Spannkettenspannung überwunden worden ist. Sollte in dem einen oder dem andern Falle der sich ergebende Widerstand nicht gross genug befunden werden, so wird man entweder durch Vergrösserung der Grundplatten *U*, oder durch Tieferlegung derselben, oder indem man die Spannketten bei *U* abbiegt, und bis gegen *Z* hin fortführt, oder auf irgend eine andere Weise den nothwendigen Widerstand zu erreichen suchen müssen.

Aehnliche Untersuchungen sind dort nothwendig, wo die Spannketten einen bald mehr bald weniger spitzen Winkel mit dem Horizonte bilden, und ohne ihre Richtung zu ändern, ihren Befestigungspunkten zugeführt werden. In dem einfachsten Falle, wo über den Wurzelbolzen und den darauf liegenden Platten, nachdem sie sammt den Ketten in die ihnen zukommende Lage gebracht wurden, der zu diesem Ende ausgehobene Raum wieder mit Erde zugeschüttet wird, ist es offenbar denkbar, dass bei eintretender Spannung der Spannketten irgend ein Erdprisma *ECDG* mit einem eintretenden Losreissen von dem dasselbe umgebenden Erdkörper auf der Ebene *DG*, *Fig.* 21, herausgeschoben wird, und daher erforderlich, dass die Platte *CD* tief genug gelegt werde, damit die grösstmögliche Spannkettenspannung den aus dem Gewichte dieses Prismas, und den aus der Kohäsionskraft der Erdtheilchen dagegen erwachsenden Widerstand nicht aufzuheben vermöge. Um in dieser Beziehung sicher zu gehen, wird man unter allen hier denkbaren Prismen dasjenige in Rechnung bringen, welches den kleinsten Widerstand leistet; zu diesem Ende wird man den Widerstand zu ermessen haben, welchen dieses Prisma, indem man ihm bald mehr, bald weniger geneigte Seitenflächen gibt, dem Abschieben, Losreissen und Heben entgegensetzt. Insbesondere wird auch noch erfordert, dass, indem man die Spannung *R* am Wurzelbolzen in eine horizontale und vertikale Seitenkraft zerlegt, durch erstere kein Abschieben des Körpers *ECDHB* auf der horizontalen Ebene *DH*, oder auf irgend einer geneigten Ebene *DJ*; und durch letztere kein Herausheben des Körpers *FCDE* aus dem ihm umgebenden Terrain möglich sei. Bei solchen Anordnungen wird man ferner zu berücksichtigen haben, dass die vorhandenen Widerstände bedeutend gemindert werden, wenn allenfalls die Terrainshöhe erreichende Hochwässer das absolute Gewicht und den Zusammenhang der Erdtheile abnehmen machen.

In dem in Rede stehenden Falle, wo nur die ober der Wurzel der Spannketten befindliche Erde die der Spannkettenspannung entgegen wirkende Kraft sein soll, wird man diesen Widerstand vermehren können, wenn man die Wurzelplatten *CD*, *Fig.* 22, an ein Gewölbe *CDKL* anlehnt, welches das Herausreissen eines grösseren Erdkörpers *ECLKG*, so wie jenes dieses Gewölbes selbst nothwendig machen würde. Auch wird es wieder das Prisma des kleinsten Widerstandes sein, welches zum Abschieben über die Ebene *KG* noch immer eine, die Spannkettenspannung zureichend überwiegende Kraft erfordern muss, damit dieses Abschieben bewirkt werden könne, um dagegen für jeden Fall gesichert zu sein.

Gleicher Weise wie vorhin, wird man auch zu prüfen haben, ob nicht etwa das Abschieben des Körpers *ECDKHB* auf der horizontalen Ebene *KH*, oder eines ähnlichen Körpers auf einer, irgendwie geneigten Ebene *DJ*, oder aber ein Herausheben des Körpers *FCDE* durch die Spannkettenspannung bewirkt werden könne.

In diesem endlich, wie im vorhergehenden Falle, ist es ferner nothwendig, das auf irgend einen Punkt *O* bezogene statische Moment der Spannkettenspannung mit dem, auf eben diese Achse bezogenen statischen Momente des Schwerpunktes des Körpers *ECDKOG*, oder beziehungsweise *ECDOG* und der zum Losreissen dieser Körper von den sie umgebenden Erdkörpern erforderlichen Kräfte zu vergleichen, um zu sehen, ob statt dem Abschieben auf der Ebene *KG* nicht etwa mit einer Zusammendrückung der Erde zunächst der Ebene *OG* ein nach aufwärts erfolgendes Umstürzen jener Körper um die Achse *O* möglich ist. Diese Vergleichungen wird man wieder mit mehreren verschieden begrenzten Erdkörpern machen müssen, um hieraus auf jenen schliessen zu können, welcher in dieser Beziehung den geringsten Widerstand leistet: dieser ist es sofort, welcher noch immer genug widerstehen muss, um durch die Spannkettenspannung nicht herausgedreht werden zu können, wenn man hierüber für alle Fälle beruhigt sein will.

Auf die in diesem Artikel bisher besprochene Weise, aber mit Rücksicht auf die, durch das im vorigen Artikel Gesagte nothwendigen Modifikationen wird der Widerstand zu bemessen sein, wenn die Spannketten statt in dem natürlichen Erdboden in einem grössern massiven Mauerkörper ihre Befestigung erhalten, ohne dass ihre, in den Aufhängepunkten stattfindende Richtung geändert wird.

72. Aendern die Spannketten dort, wo sie in den Erdboden treten, ihre Richtung, indem sie bei *N*, *Fig.* 23, an ein gewölbtes Mauerwerk *NFGL* anliegend von *F* an bis *C* vertikal in dem Erdboden fortgeführt werden, so wird die Spannung der Ketten in dem Theile *CF*, mit Absehung von dem Einflusse der Reibung, jener der Spannketten gleich kommen, und daher für den Zustand der gesicherten Unmöglichkeit eines eintretenden Umsturzes der Stütze *AB* erforderlich sein, dass die zum Herausheben des Körpers *JDCEK* erforderliche Kraft die Spannkettenspannung zureichend übersteige; ausserdem aber muss man sich sicher stellen, dass, sobald das eine nicht mehr möglich ist, die horizontale Seitenkraft der Spannkettenspannung nicht etwa den Körper *BNFGH* auf der horizontalen Ebene *GH* abzugleiten veranlassen kann, so wie, dass die, aus den nach *NA* und *FC* stattfindenden Spannungen hervorgehende Mittelkraft nicht etwa das Abschieben des Körpers *BNFGO* auf der geneigten Ebene *GO*, oder dessen Umstürzen um seinen irgendwo unterhalb *H* liegenden Fusspunkt *O* zu bewirken vermag. Man wird zu diesem Ende das auf diesen Punkt bezogene statische Moment jener Mittelkraft mit den auf dieselbe Achse bezogenen statischen Momenten des Schwerpunktes des Körpers *BNFGO* und der zum Losreissen desselben in seinen Begrenzungsebenen nothwendigen Kräfte zu vergleichen haben, wenn die ermittelte Richtung jener Mittelkraft

anders ein solches Umstürzen besorgen lässt; die Richtung dieser Kraft ist übrigens in der fraglichen Beziehung, wie diess für sich einleuchtet, um so ungünstiger, je grösser die, auf dem Gewölbstheile *NF* stattfindende Reibung ist; so wie die Umstände nach dem im vorigen Abschnitte über den Einfluss der Reibung Gesagten leicht zu beurtheilen sind, unter welchen diese Reibung der in Rede stehenden Festigkeit zu Gunsten kommt, sobald die Wurzel der Ketten bei *C* hinlänglich fest liegt, um durch die bedingungsweise in den Ketten *FC* grösser als in den Ketten *NA* sich erzeugende Spannung nicht gehoben werden zu können.

Aehnliche Untersuchungen hat man vorzunehmen, wenn die Spannketten schon zu Tage, in zu diesem Ende aufgeführten niedrigen Pfeilern *FN*, *Fig.* 24, ihre schiefe Richtung *AN* in eine vertikale *FC* verwandeln; nur hat man in einem solchen Falle sich auch noch gegen das Abschieben der zu Tage liegenden Pfeiler *FN* über ihrem Grundmauerwerke auf eine der, in dem ersten Artikel dieses Abschnittes angedeutete analoge Weise sicher zu stellen.

Um die Grösse und Richtung dieser, aus der Spannung *R* des Theiles *AN*, und der Spannung *S* des Theiles *FC* der Spannketten hervorgehenden Mittelkraft *P* zu ermitteln, wollen wir den Winkel *SDE*, den ihre Richtung *DE* mit der Vertikalen *SD* einschliesst, wie bisher β, und den Winkel *RDH*, unter welchen die Spannketten von dem Horizonte abweichen, wie bisher w heissen; konstruiren wir jetzt aus den Kräften *R* und *S* das Kräftenparallelogramm *SDRE*, und zerlegen wir die Mittelkraft *DE* in eine horizontale und vertikale Seitenkraft, so ist erstere offenbar nichts anders, als die horizontale Seitenkraft der, in eine solche und in eine vertikale zerlegt gedachten Spannung *R* und daher gegeben durch

$$R \, Cos \, w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

Ihre vertikale Seitenkraft aber ist der Unterschied der Spannung *S* und der aus der Spannung *R* durch die obige Zerlegung hervorgegangenen vertikalen Seitenkraft, und somit gegeben durch

$$S - R \, Sin \, w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

Die Mittelkraft selbst demnach, als die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate ihrer rechtwinklichten Seitenkräfte, wird ausgedrückt durch

$$P = \sqrt{[R^2 - 2R \, Sin \, w + S^2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

Der Winkel, den diese Kraft mit dem Horizonte einschliesst, wird endlich, wie leicht einzusehen ist, bedingt durch die Gleichung

$$tang \, \beta = \frac{R \, Cos \, w}{S - R \, Sin \, w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

Ist β früher als *P* gesucht worden, so wird diese Kraft leichter berechnet werden können nach der aus der unmittelbaren Betrachtung des Kräftenparellelogramms *SDRE* sich hiefür ergebenden Gleichung

$$P = \frac{R \, Cos \, w}{Sin \, \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

73. Hieher gehören noch die Untersuchungen über jene Spannung, welche in den vertikalen Spannketten der Mittelpfeiler erzeugt wird, wenn diese zu dem Ende angelegt werden, um das Gleiten der Ketten bei zufälliger

Ueberlastung einer der zu beiden Seiten desselben befindlichen Brückenbahnen zu verhindern; wir werden im nächsten Abschnitte die Umstände kennen lernen, unter welchen eine solche Vorsicht nothwendig wird.

Sei daher *AGBCHD*, *Fig.* 25, ein solcher Mittelpfeiler, in welchem von *B* und *C* vertikale Spannketten *BK* und *CL* bis nahe an die Basis des Pfeilers herablaufen, um das angeführte Gleiten der Ketten zu verhindern, wenn auf einer der beiden Bahnen die grösstmögliche zufällige Belastung sich befindet, derweil die andere Kette nur ihr eigenes Gewicht und die übrige beständige Belastung zu tragen hat. Ist nun *HJ* die überlastete Bahn, so muss vor allem das auf *D* als Drehungsachse bezogene statische Moment des Pfeilergewichtes und das statische Moment der auf dieselbe Achse bezogenen von *B* gegen *N* in der Kette *BN* stattfindenden Spannung das ebenfalls auf die Achse *D* bezogene statische Moment der von *C* gegen *M* in der Kette *CM* zu gewärtigenden Kettenspannung zureichend überwiegen; oder, was einerlei ist, es muss das statische Moment des Pfeilergewichtes genügend grösser sein, als das auf die gemeinschaftliche Drehungsachse *D* bezogene statische Moment der aus beiden Spannungen sich ergebenden Mittelkraft. Statt diesem statischen Momente kann, wie für sich klar ist, auch das auf *D* bezogene statische Moment der aus dieser Mittelkraft beider Spannungen sich ergebenden horizontalen und vertikalen Seitenkräfte, wovon das eine auf den Umsturz der Pfeiler wirkt, das andere seiner Stabilität zu Gute kommt, in Rechnung gebracht werden.

Um nun aber die Kraft zu finden, mit welcher die Spannkette *BK* in einem solchen Falle in Anspruch genommen wird, muss nach den Untersuchungen des vorigen Abschnittes zuerst ermittelt werden, wie gross jene Spannung werden würde, welche sich aus der vorhin besprochenen Ueberlastung in die, die Abgleitungskurve *BC* in *B* berührende Kette *BN* übertragen würde. Man wird zu dem Ende berechnen, wie gross die in dieser Kette nothwendige Spannung ist, um der, mit Berücksichtigung des allfälligen Reibungswiderstandes durch die beständige und zufällige Belastung der Kette *CM* in dieser bei *C* sich erzeugendon Spannung das Gleichgewicht zu halten, und hievon die in der Kette *BN* bei *B* durch die beständige Last dieser Ketten bewirkt werdende Spannung abziehen; dieser Unterschied gibt offenbar die fragliche Kraft.

Diese Kraft in eine horizontale und vertikale Seitenkraft zerlegt, gibt endlich in letzterer die alsdann in der Kette *BK* zu gewärtigende Spannung, und es muss daher dafür gesorgt werden, dass diese Ketten einen dieser Spannung angemessenen Querschnitt erhalten, und dass sie bei *K* und *L* keine Trennung des Zusammenhanges der Pfeilertheile zu bewirken vermögen.

74. Endlich kann es geschehen, dass man, um das vorhin beiläufig besprochene Gleiten der Ketten über die Mittelpfeiler, und die hiemit verbundenen Unzukömmlichkeiten zu verhindern, diese aus zwei nach einander folgenden, getrennten, auf einem gemeinschaftlichen Unterbau *QAHS*, *Fig.* 26, ruhenden Pfeilern *ABCD* und *EFGH* bestehen lässt, über welche die Tragketten nicht ununterbrochen fortlaufen, sondern rückwärts deren sie eben so,

wie bei den Landpfeilern, in, vom Horizonte unter einem spitzen Winkel abweichende, im Unterbau befestigte Spannketten übergehen.

Der Widerstand, welchen in einem solchen Falle die bei J und K eine vertikale Richtung annehmenden Spannketten bei L und M finden müssen wird leicht zu beurtheilen sein, sobald man die Spannungen R und R' der schiefen Spannketten unter dem beziehungsweisen Einflusse der beständigen und zufälligen, und der zufälligen Belastung allein nach den Gleichungen des vorigen Abschnittes berechnet hat. Wird dann von der geringen Verminderung, welche diese Spannung bei J und K durch die Reibung in ihrer Fortpflanzung nach JL und KM erleidet, abgesehen, so kann insbesondere der von L und M aufwärts stattfindende Zug der Spannung R oder R' gleich gesetzt werden. So lange daher beide Bahnen gleich belastet sind, ist bezüglich der Punkte L und M dafür zu sorgen, dass das eigene Gewicht des über diesen Punkten im ausgedehnteren Sinne ruhenden Mauerwerkes, und der vertikale aus den Tragketten- und Spannkettenspannungen hervorgehende beziehungsweise Druck

$$T \sin \alpha + R \sin w, \text{ oder } T' \sin \alpha + R' \sin w$$

grösser als R oder R' sei, wenn nämlich, wie R' die Spannkettenspannung, so T' die Tragkettenspannung bei unbelasteter Bahn bezeichnet. Ist aber nur eine, z. B. wieder nur die rechtsliegende Bahn überlastet, so muss für den Zustand des gesicherten Gleichgewichtes R kleiner sein, als das Gewicht des, durch den Befestigungspunkt L allenfalls zu hebenden Mauerwerkes, und die den Pfeiler $ABCD$ vertikal niederdrückenden Kräfte

$$T' \sin \alpha + R' \sin w.$$

Die Mittelkräfte, welche in einem solchen Falle bei J und K nach O und P hin, gegen einander wirken, und ihr Erfolg ist nach den Gleichungen des 72. Art. leicht zu finden und zu beurtheilen.

Der Unterschied der horizontalen Seitenkräfte dieser beiden Mittelkräfte, oder der Schub, der horizontal nach der unbelasteten Brückenhälfte hin stattfindet, muss übrigens, wie leicht einzusehen ist, dem Unterschiede der horizontalen Seitenkräfte der Spannkettenspannungen R und R' gleich sein. Das Abschieben wird aber nebst dem Reibungs- und Kohäsions-Widerstande der Pfeilertheile im vorliegenden Falle durch die absolute Festigkeit der gegenüber befindlichen Spannkette erschwert, daher diese hierbei gehörig in Rechnung zu ziehen sein wird. Die Stabilität der Pfeiler wird endlich nach den im vorigen Abschnitte aufgestellten Gleichungen zu berechnen und festzusetzen sein.

Siebenter Abschnitt.

Einfluss der Spannkettenbeugung auf die Beweglichkeit der Stützen und das Gleiten der Ketten über die Pfeiler, und Einfluss der einseitigen Ueberlastungen durch Mittelpfeiler getrennter Brückenbahnen auf das Schwanken der letzteren.

---

75. Wir haben schon im fünften Abschnitte, Art. (47) davon gesprochen, dass die, wegen des eigenen Gewichtes der Spannketten unvermeidliche Beugung derselben ein Neigen der damit unzertrennbar verbundenen Stützen oder Pfeiler, über welche die Ketten weggeführt werden, zur Folge hat, sobald in der Belastung der Tragketten eine Veränderung vor sich geht. Ob nun gleich der Einfluss, den diese Beugung der Spannketten auf das Gleichgewicht und den Bestand der Theile einer Kettenbrücke hat, wegen des im Verhältnisse zur Spannung, welcher diese Ketten in Folge der Tragkettenspannung ausgesetzt werden, immer sehr geringen eigenen Gewichtes, stets ein nur sehr unbedeutender sein kann, und man über die diessfälligen Erfolge meistentheils keine besondern Untersuchungen anzustellen nöthig haben wird, wollen wir dennoch, um uns in jedem Falle, wo diess wünschenswerth sein könnte, hierüber Rechenschaft geben zu können, jenen Einfluss einer nähern Betrachtung unterziehen.

Wir haben im 48. Art. für den einfachsten aller Fälle, die bei der Unterstützung der Ketten auf den beiderseitigen Ufern vorkommen können, nämlich für jenen Fall, wo die Ketten hier über leicht bewegliche vertikale Stützen *AB, Fig.* 27, weggeführt werden, gefunden, dass der Zustand des Gleichgewichtes erst dann eintrete, wenn die horizontale Seitenkraft der Spannkettenspannung der horizontalen Seitenkraft der Tragkettenspannung gleich, oder, indem wir diese sich gleichen horizontalen Spannungen mit Q', und die Spannung der Tragketten mit T bezeichnen; wenn

$$Q' = T' Cos\, \alpha$$

geworden ist, und wir haben jetzt vor allem zu untersuchen, wo der Scheitel O der bis dahin verlängert gedachten Krummen ACN liegt, welche die Spannketten alsdann bilden werden, wenn ihre horizontale Seitenkraft jene Grenze errreicht; sobald nämlich die Gleichung jener Parabel gefunden sein wird, welcher der Bogen ACN angehört, wird die Bestimmung der in

demselben stattfindenden Spannung und die Beantwortung der übrigen, hieher gehörigen Fragen keinem Anstande mehr unterliegen.

Wird nun, um hiezu zu gelangen, mit ω der Winkel, welchen der Bogen ACN bei A mit dem Horizonte einschliesst, mit a die Entfernung BN oder AP, und mit b die Stützenhöhe AB oder PN, endlich mit p' das Gewicht, welches für die laufende Einheit der Geraden BN von dem Gewichte der Kette NCA entfällt, bezeichnet, und wird O als der fragliche Scheitel, $OM = x'$ als die Abscisse, dann $MN = y'$ als die Ordinate des Punktes N, also der Scheitel O, wie bisher, als Koordinatenursprung, endlich $h' = x' + a$ als die halbe Spannweite, und $f' = y' = b$ als die Pfeilhöhe der Krummen ONA angenommen, so ist durch Substitution in die allgemeine Gleichung (12) Art. (13)

$$b' + y' = \frac{f'(x' + a)^2}{h'^2},$$

die Gleichung, welche die, zwischen den Koordinaten des Punktes A und N stattfindenden Beziehungen darstellt, wofür auch, indem bei ähnlichen Substitutionen als zweite, diese Beziehungen bedingende Gleichung

$$y' = \frac{f' x'^2}{h'^2}$$

erhalten wird

$$b + \frac{f' x'^2}{h'^2} = \frac{f'(x' + a)^2}{h'^2}$$

oder kurzweg

$$bh'^2 + f' x'^2 = f'(x' + a)^2$$

geschrieben werden kann. Nun ist aber nach Art. (27)

$$Q' = \frac{p' h'^2}{2f'}, \text{ also } f' = \frac{p' h'^2}{2Q'}, \text{ und } h'^2 = \frac{2f' Q'}{p'},$$

mithin, wenn wir diesen Werth statt h'^2 in die vorhergehende Gleichung substituiren

$$2bQ' + p' x'^2 = p'(x' + a)^2$$

woraus wir finden, dass der Scheitel O von dem Punkte N, um die Grösse

$$x' = \frac{2bQ' - p'a^2}{2p'a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

horizontal entfernt sei, und es ist somit die halbe Spannweite $AD = x' + a$ gegeben durch die Gleichung

$$h' = \frac{2bQ' + p'a^2}{2p'a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

Führen wir diesen für h' gefundenen Werth in die vorhin für f' abgeleitete Gleichung ein, so erhalten wir für die Pfeilhöhe OD der Krummen ONA den Ausdruck

$$f' = \frac{p'}{2Q'}\left(\frac{2bQ' + p'a^2}{2p'a}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

und es ergibt sich endlich durch die Substitution der, für f', h' und x' ermittelten Werthe nach der zweiten, in diesem Art. aufgestellten Gleichung, dass der Scheitel O der Krummen ONA um die Grösse

$$y' = \frac{p'}{2Q'}\left(\frac{2bQ' - p'a^2}{2p'a}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

tiefer als der Punkt A liege.

Nachdem f' und h' gefunden worden, bedingt sich der Winkel w, welchen die Spannketten bei A mit dem Horizonte einschliessen, nach Art. (15) durch die Gleichung

$$tang\, w = \frac{2bQ' + p'a^2}{2aQ'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Ferner erhalten wir, weil allgemein

$$Cos\, w = \frac{1}{\sqrt{1 + tang^2 w}}$$

ist, indem wir diesen Werth in der Gleichung (53) Art. (48) einführen, für die, in den Spannketten bei A zu gewärtigende Spannung

$$R' = T' Cos\, \alpha \sqrt{1 + tang^2 w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96).$$

Für den vertikalen Druck P', welchen die in A stattfindende Spannkettenspannung R', und die eben hier statthabende Tragkettenspannung T' auf die Stütze ausüben, wird endlich, wie im 48. Art. die Gleichung

$$P' = T' (Sin\, \alpha + Cos\, \alpha\ tang\, w) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

gefunden werden.

Endlich wird man die Spannkettenlänge l', welche erforderlich ist, um die Stützen zur Zeit der in den Tragketten stattfindenden horizontalen Spannung Q' vertikal stehend zu erhalten, dadurch finden, dass man in den Gleichungen (16) Art. (21) statt f und h einmal die durch die Gleichungen (91) und (94) gegebenen Koordinaten des Punktes N, und das zweite Mal die durch die Gleichungen (92) und (93) bedingten Koordinaten des Punktes A einführt, und beide so sich ergebenden Kettenlängen von einander abzieht.

76. Geht durch eine zufällige Ueberlastung der Bahn die unter dem Einflusse der beständigen Belastung stattgehabte horizontale Spannung Q' der Tragketten in Q über, so werden sich die Stützen mit einer Verflachung der Spannkettenkrümmung so lange nach vorwärts neigen, bis die Spannung R der Spannketten so gross geworden ist, dass ihre horizontale Seitenkraft ebenfalls gleich Q wird. Ist nun NCE, *Fig.* 28, die neue Spannkettenkurve, und setzen wir

$$PE = a + d,$$

wo also d die in dem Punkte A in Folge der Abnahme der Spannkettenbeugung eingetretene horizontale Ortsveränderung $A\ddot{E}$ bezeichnet, während $EB = AB = b$ gesetzt, oder PN als unverändert angenommen werden kann, so gehört nach den vorhergehenden Untersuchungen dieses Kurvensegment einer Parabel an, deren halbe Spannweite ED oder

$$h = \frac{2bQ + p'(a+d)^2}{2p'(a+d)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

und deren Pfeilhöhe DO oder

$$f = \frac{p'}{2Q}\left(\frac{2bQ + p'(a+d)^2}{2p'(a+d)}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

ist. Für die Koordinaten des Punktes N aber hat man

$$x = \frac{2bQ - p'(a+d)^2}{2p'(a+d)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (100)$$

und

$$y = \frac{p}{2Q}\left(\frac{2bQ - p'(a+d)^2}{2p'(a+d)}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (101)$$

Substituiren wir nun einmal die Koordinaten h und f, und das zweite Mal die Koordinaten x und y, in der Gleichung (16) Art. (21) und ziehen wir, indem wir von denselben blos die ersten beiden Glieder beibehalten, die so entstehenden Gleichungen von einander ab, so erhalten wir für die Länge l' des Bogens NCA die Gleichung

$$l' = \frac{24Q^2(a+d)^2 + 12b^2Q^2 + p^2(a+d)^4}{24Q^2(a+d)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (102)$$

weil aber diese Länge aus den Berechnungen des vorhergehenden Art. bekannt ist, so wird man durch Auflösung dieser biquadratischen Gleichung $(a+d)$ also auch d, oder die Grösse zu ermitteln im Stande sein, um welche eine horizontale Ortsverschiebung des Punktes A durch das Wachsen der Spannung Q' bis zur Grenze Q vor sich gehen wird. Der für d sich ergebende Werth in den Gleichungen (44) bis (46) Art. (43) eingeführt, lässt uns die Veränderung beurtheilen, welche in der Pfeilhöhe der Tragketten als Folge des eben besprochenen Vorwärtsneigens der Stützen eintreten wird.

Da übrigens die Auflösung der Gleichung (102) auf ordentlichem Wege immer weitläufig bleibt, so wird man am leichtesten zum Ziele gelangen, wenn man, da a bekannt ist, und d nicht sehr gross werden kann, durch Versuche für $(a+d)$ jenen Werth ermittelt, welcher dieser Gleichung Genüge thut. Um hierbei der Versuche nicht gar zu viele machen zu müssen, wird man nach zwei gemachten Versuchen, deren ersterem die Grösse z', deren zweitem die Grösse z'' zu Grunde gelegt wurde, und durch deren ersten statt des gehofften wahren Werthes W, der falsche Werth W', durch deren zweiten statt des erwarteten wahren Werthes W, der falsche Werth W'' gefunden wurde, einen der Wahrheit ziemlich nahe liegenden Werth der Unbekannten aus dem Verhältnisse

$$z - z' : z - z'' = W - W' : W - W''$$

oder der sich hieraus ergebenden Gleichung

$$z = \frac{z'(W - W'') - z''(W - W')}{W' - W''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (103)$$

erhalten, dass für den vorliegenden Fall $W = l'$, und $z = a + d$ sei, bedarf wohl keiner Erinnerung. Leistet der so gefundene Werth der gegebenen Gleichung nicht hinreichend Genüge, so wird ein wiederhohltes Verfahren, indem man nämlich eine der für die Unbekannte früher angenommenen Grössen, und den Werth, welcher hiernach für den zweiten Theil der Gleichung erhalten wurde, und die letztermittelte Grösse der Unbekannten und den Werth, welcher hiernach für den zweiten Theil der Gleichung sich ergeben hat, zu Grunde legt, einen der Wahrheit in den meisten Fällen schon genügend nahe kommenden Werth für die Unbekannte finden lassen.

77. Weichen die Stützen von der Vertikalen AC, *Fig.* 29, unter dem

Winkel $CAB = \beta$ ab, so wird alsdann das Vorwärtsneigen derselben und das Verflachen der Spannketten aufhören, wenn nach Art. (49) in den letztern die horizontale Spannung

$$Q' = \frac{T' \, Cos \, (\alpha + \beta)}{Cos \, \beta}$$

geworden ist, und es leuchtet für sich ein, dass die Beziehungen, welche im vorliegenden Falle zwischen den Grössen Q', f', h', x', y', a und b, alle in dem frühern Sinne genommen, stattfinden, jenen, wie wir sie im 76. Art. gefunden haben, ganz gleich bleiben, nur dass b jetzt nicht die Stützenlänge AB, sondern ihre vertikale Höhe AC bezeichnet.

Auch für die trigonometrische Tangente des Winkels w gilt also der früher gefundene Ausdruck

$$tang \, w = \frac{2bQ' + p'a^2}{2aQ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

Für die Spannkettenspannung geht im vorliegenden Falle die Gleichung (45) Art. (49) nach geschehener Verwandlung der trigonometrischen Funktionen über in

$$R' = \frac{T' \, Cos \, (\alpha + \beta) \sqrt{1 + tang^2 w}}{Cos \, \beta + Si \, \beta \, tang \, w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

worin also statt $tang \, w$, der hiefür nach der Gleichung (104) sich ergebende Werth einzuführen sein wird; man erhält nämlich diese Gleichung aus der Gleichung (55), indem man darin $Cos \, (w - \beta)$ wirklich entwickelt, sich dann erinnert, dass

$$Cos \, w = \frac{1.}{\sqrt{1 + tang^2 w}}, \text{ und } Sin \, w = \frac{tang \, w}{\sqrt{1 + tang^2 w}}$$

ist, und sonach diese durch die Tangente ausgedrückten Funktionen in jener Gleichung einführt.

Auf ähnlichem Wege wird man aus der Gleichung (56) Art. (49) für den Druck, mit welchem die rückwirkende Festigkeit der Stützen in Anspruch genommen wird, die Gleichung

$$P' = T' \, \frac{Sin \, \alpha + Cos \, \alpha \, tang \, w}{Cos \, \beta + Sin \, \beta \, tang \, w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

erhalten.

Endlich unterliegt, wenn T' in T, Q' in Q, und a in $a + d$ übergeht, die Berechnung der durch die letzten Gleichungen gegebenen Grössen eben so wenig, wie im 75. Art. irgend einem Anstande, man wird nämlich, wie für sich klar ist, blos in den Gleichungen (95), (96) und (97) und in den Gleichungen (104, (105) und (106) statt a, Q' und T' die diesen Grössen bei geänderter Tragkettenspannung zukommenden neuen Werthe einzuführen haben.

78. Werden die Ketten *NCM*, *Fig.* 30 über massive Pfeiler *DCAB* weggeführt, deren Stabilität gross genug ist, um ein Gleiten der Ketten von der einen nach der andern Seite möglich zu machen, wenn Veränderungen in den Kettenspannungen vor sich gehen, so hängt das Eintreten dieses Gleitens und dessen Grösse, so wie Spannkettenspannung von dem hierbei auf dem Pfeiler zu überwindenden Reibungswiderstande ab. In dem besondern

Falle, wo diese Reibung so gering ist, dass sie gleich *Null* gesetzt werden kann, ist, wie wir wissen, die Spannung der Spannketten jener der Tragketten gleich. Bezeichnen wir also die eine, für einen bestimmten Belastungszustand z. B. für jenen, wo keine zufällige Belastung auf der Bahn sich befindet, mit R', und die andere mit T', so ist jetzt

$$R' = T'.$$

Stellen nun a, b, f', h' x' y' und Q' die damit bisher bezeichneten Grössen vor, so ist nach der Gleichung (25) Art. (27)

$$R' = \frac{p'h'}{2f'}\sqrt{h'^2 + 4f'^2}$$

woraus

$$f'^2 = \frac{p'^2 h'^4}{4h'^2 - 4p'^2 h'^2}$$

gefunden wird.

Setzt man nun in der allgemeinen Gleichung (12) Art. (13) f' statt f, h' statt h, $f'-b$ statt y, und $h'-a$ statt x, so geht sie über in

$$f' - b = \frac{f'(h'-a)^2}{h'^2},$$

woraus

$$f' = \frac{bh'^2}{2ah' - a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

sich ergibt; demnach ist auch

$$\frac{p'^2 h'^4}{4h'^2 - 4p'^2 h'^2} = \left(\frac{bh'^2}{2ah' - a^2}\right)^2.$$

Durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung, und indem man T' statt R' einführt, erhält man

$$h' = \frac{a^2}{2(a^2 + b^2)} \pm \sqrt{\frac{4b^2 T'^2 - a^4 p'^2}{4p'^2 (a^2 + b^2)} + \frac{a^4}{4(a^2 + b^2)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

aus dieser Gleichung kann nun in jedem gegebenen Falle h', und indem man den hiefür gefundenen Werth in der Gleichung (107) statt h' substituirt, auch f' berechnet werden. Führt man nun einmal die dem Punkte N zugehörigen Koordinaten $h'-a$, und $f'-b$, und das zweitemal die Koordinaten h' und f' selbst in der Gleichung (16) Art. (21) ein, so findet man durch Subtraktion beider so sich ergebenden Kurvenlängen die Länge des Theiles NEC, bei welcher, wenn sie die Spannketten angenommen haben, das Gleiten über die Pfeiler unter der Einwirkung der Spannung T' aufhört.

Wird nun durch zufällige Belastungen der Bahn die Spannkettenspannung in

$$R = T$$

übergehen gemacht, so findet man die neue, nach hergestelltem Zustande des Gleichgewichtes, d. i. nach beendetem neuerlichem Gleiten der Ketten über die Pfeiler statthabende Spannkettenlänge, auf dem vorigen Wege, indem man dabei die Spannung R oder T statt der Spannung R' oder T' in Rechnung zieht.

Beide Kurvenlängen von einander abgezogen, geben sonach die Grösse

an, um welche ein Gleiten der Ketten von der einen nach der andern Seite hin möglich war.

79. Denselben Weg wird man einzuschlagen haben, wenn die Grösse zu suchen ist, um welche in Folge entstehender Ueberlastungen der Bahn ein Gleiten der Ketten über die Pfeiler bei stattfindenden kleinerem oder grösserem Reibungswiderstande von einer nach der andern Seite vor sich geht; nur wird man statt der Spannkettenspannung jene Werthe einzuführen haben, welche sich hiefür in jedem besonderen Falle nach den Untersuchungen des 57. und der darauf folgenden Artikel bedingen. Hier kann es sich indessen ereignen, dass, wenn die Stabilität der Pfeiler zu gering ist, statt dem Gleiten der Ketten ein Vorwärtsneigen der Pfeiler eintritt; diess wird nämlich alsdann geschehen, wenn das auf die Drehungsachse B bezogene statische Moment der zur Ueberwindung der Reibung, wie sie vor der Ueberlastung der Bahn Statt hatte, erforderlichen Kraft grösser oder nur gleich oder zu wenig geringer ist, als das auf dieselbe Achse bezogene statische Moment des Pfeilergewichtes; im ersten Falle wird nämlich das Neigen der Pfeiler schon eintreten, unter der Einwirkung der beständigen Belastung, im zweiten Falle mit dem Hinzukommen der geringsten zufälligen Ueberlastung, im dritten Falle endlich erst dann, wenn die zufällige Belastung gross genug geworden ist, um das statische Moment der zur fraglichen Reibungsüberwindung erforderlichen Kraft das statische Moment der Pfeilerschwere überwiegen zu machen. Das Beginnen und das Aufhören der Pfeilerbewegungen, so wie die, an beiden Grenzen in den Spannketten statthabenden Spannungen, sind nach den Untersuchungen des fünften Abschnittes leicht zu berechnen. Sobald letztere ermittelt sind, kann auch die Bestimmung der horizontalen Ortsveränderung, welche in dem Aufhängepunkte der Spannketten hiedurch zu gewärtigen ist, und die sonach das Mass der Neigung gibt, die in den Pfeilern möglicher Weise eintreten wird, keiner Schwierigkeit mehr unterliegen. Sie wird nämlich offenbar auf eine der im 75. und 76. Art. eingeschlagenen, analoge Weise, nur dass man statt Q' und Q die aus den, beim Beginnen und Aufhören der Pfeilerbewegungen, in den Spannketten stattfindenden Spannungen, sich ergebenden horizontalen Seitenkräfte einzuführen hat, vorzunehmen sein.

Endlich geben die so gefundenen Grössen, um welche eine horizontale Ortsveränderung der Aufhängepunkte der Ketten möglich ist, und um welche die Ketten ausserdem allenfalls noch von der einen nach der andern Seite hin gleiten können, in den Gleichungen (47) bis (49) Art. (44) statt d und δ eingeführt, diejenige Pfeilhöhe oder ihre Veränderungen, welche die Tragketten bei erfolgendem Neigen der Pfeiler und Gleiten der Ketten annehmen werden, und die zur Beurtheilung der Schwankungen dienen, welche durch das zufällige Belasten und Entlasten der Bahn herbeigeführt werden; sie bleiben indessen immer etwas kleiner, als sie hiernach gefunden werden, weil mit der Zunahme der Pfeilhöhe der Tragketten ihre tangentiale Spannung in allen Punkten, wie wir wissen, abnimmt, doch können die Unterschiede wegen den stets sehr wenig gebeugten Spannketten nie erheblich werden.

80. Die Gleichungen der bisherigen Art. dieses Abschnittes werden endlich auch dazu angewendet werden können, um in jenen Fällen, wo die Spannketten zum Tragen eines Theiles der Brückenbahn benützt werden, die Gleichung jener parabolischen Krümmung zu ermitteln, welche diese Ketten im Zustande des Gleichgewichtes zwischen der Tragketten- und Spannketten-Spannung annehmen. Diese Krümmung wird offenbar einer andern Parabel angehören, je nachdem p' entweder das, der laufenden Einheit der horizontalen Projektion des Spannkettenbogens nur von dem Gewichte der Bahn, der Hängestangen und Ketten; oder aber das hievon und von der gröstmöglichen zufälligen Belastung jener laufenden Einheit entfallende Gewicht bezeichnet. Gleicher Weise hat auf diese Krümmung, wie bei den frühern Untersuchungen der Umstand Einfluss, ob bei der Berechnung der Tragkettenspannung ebenfalls blos auf das Gewicht der beständigen, oder aber auf jenes der beständigen und zufälligen Belastung der Tragketten Rücksicht genommen wurde. Handelt es sich nun um die Gleichung der Spannkettenkurven, um dieser gemäss die Hängestangenlängen zu ermitteln, so wird offenbar nur die beständige Belastung in Rechnung zu ziehen, also mit Berücksichtigung der, aus dieser Belastung allein entstehenden Tragketten- und Spannkettenspannung die Pfeilhöhe und Spannweite jener Parabel nach den bisher abgeleiteten betreffenden Gleichungen zu suchen sein, von welcher die Spannketten einen Theil bilden.

Ferner ist es nach dem bisher über den Einfluss der Spannkettenbeugung überhaupt Gesagten auch nicht mehr schwer, sich über die Schwankungen Rechenschaft zu geben, welche in der, an den Spannketten sowohl, als an den Tragketten hängenden Bahn eintreten, wenn durch zufällige Ueberlastungen einer oder der andern Veränderungen in ihren Spannungen bewirkt werden; diese Schwankungen erreichen indessen wieder nie die Grenze, welche nach den diesfälligen Berechnungen sich ergeben, indem mit der, durch zufällige Belastungen oder Entlastungen der Bahn herbeigeführt werdenden Vergröfserung oder Verkleinerung der Pfeilhöhe der einen Kurve ihr nachtheiliger Einflufs, wegen der gleichzeitig in der andern Kurve umgekehrt abnehmenden oder zunehmenden Pfeilhöhe sich mindert.

In Fällen, wo dieser Umstand besondere Berücksichtigung verdient, wo nämlich die Länge der Spannketten und ihre Beugung bedeutend ist, werden die diefsfälligen Untersuchungen auf die aus den nachfolgenden Artikeln hervorgehende Weise zu geschehen haben.

Sind die Spannketten mit dem Pfeiler unzertrennbar verbunden, und besitzt dieser eine zureichende Stabilität, um weder bei der Ueberlastung der einen, noch bei der Ueberlastung der andern Bahn irgend eine Bewegung zuzulassen, so wird die Gleichung der Krummen, welcher die Spannkettenkrümmung angehört, bedingt sein, sobald ihr Aufhängepunct C und ihr Befestigungspunkt N, und aufserdem festgesetzt ist, wie weit entweder der Scheitel der fraglichen Krummen horizontal von N entfernt sein dürfe, oder wie viel er vertikal unter demselben liegen soll, oder wie lang endlich die Spannketten gemacht werden sollen. Im ersten Falle, wenn nämlich h bedingt ist, er-

halten wir durch Substitution der gegebenen Grössen a, b und h in der allgemeinen Gleichung (12) Art. (13).

$$f - b = \frac{f\,(h-a)^2}{h^2},$$

und hieraus

$$f = \frac{bh^2}{2ah - a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

Im zweiten Falle, wenn nämlich f gegeben ist, findet man durch Substitution in jener allgemeinen Gleichung den vorigen Ausdruck, und hieraus

$$h = a\left[\frac{f}{b} \pm \sqrt{\frac{f^2}{b^2} - \frac{f}{b}}\right] \quad \ldots\ldots \quad (110)$$

Ist endlich ausser a und b die Länge l festgesetzt, welche die Spannketten erhalten sollen, so hat man vorerst für die, der Abscisse h, des Punktes C zugehörige Ordinate den Ausdruck

$$f = \frac{bh^2}{2ah - a^2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (111)$$

für die, der Abscisse $h - a$ des Punktes N entsprechende Ordinate aber ergibt sich die Gleichung

$$f - b = \frac{b\,(h-a)^2}{2ah - a^2}.$$

Führt man daher einmal die dem Punkte C zugehörigen Koordinaten

$$h \text{ und } \frac{bh^2}{2ah - a^2},$$

und das anderemal die dem Punkte N entsprechenden Koordinaten

$$h - a \text{ und } \frac{b\,(h-a)^2}{2ah - a^2}$$

in der Gleichung (16) Art. (21) ein, und zieht man beide so sich ergebenden Bogenlängen von einander ab, so gibt der Unterschied beider, der bedingten Spannkettenlänge gleich gesetzt, eine neue Gleichung, die nur h unbekannt enthält, daher dasselbe hieraus berechnet werden kann; dieser Werth in die für f abgeleitete Gleichung (111) eingeführt, gibt endlich auch die Pfeilhöhe der fraglichen Spannketten-Parabel.

Mit Beibehaltung der beiden ersten Glieder der Reihengleichungen (16) Art. (21) erhält man nach gehöriger Substitution und Reduktion die Gleichung

$$l = a + \tfrac{8}{3}\left[\frac{b^2\,(3h^2 - 3ha + a^2}{a(2h-a)^2}\right] \quad \ldots\ldots \quad (112)$$

aus welcher sonach in den meisten Fällen h, und auf angezeigtem Wege auch f mit zureichender Genauigkeit wird berechnet werden können.

81. Aus ähnlichen Ursachen, wie wir sie bisher in diesem Abschnitte besprochen haben, entstehen ähnliche Schwankungen der Brückenbahnen, wenn diese an zwei oder mehreren, nach einander folgenden, durch Mittelpfeiler geschiedenen Kettenbogen aufgehangen werden.

Betrachten wir zuerst den einfachsten dieser Fälle, jenen, wo nur zwei Bogen *ABC* und *DEF* nach einander folgen, deren einer *B*, *Fig.* 31 nur die

beständige Last der Ketten, Bahn und Hängestangen, von welcher für die Einheit der Spannweite das Gewicht p entfällt, deren anderer E ausser dieser beständigen Last auch noch eine, auf der ganzen zugehörigen Bahn gleichförmig vertheilte zufällige Belastung, von welcher für die Einheit seiner Spannweite zu jenem Gewichte p noch eine Ueberlast q hinzukommt, zu tragen hat.

Der Erfolg, den diese einseitige Ueberlastung herbeiführt, ist nun offenbar verschieden, je nach der Weise, wie die Ketten über die sie unterstützenden Pfeiler weggeführt werden.

Sind nämlich die Ketten auf dem Mittelpfeiler $GCDH$ bei CD mit diesem unzertrennbar verbunden, so kann nur in soweit eine Veränderung in der Figur beider Bogen B und E bewirkt werden, als die natürliche Elastizität des Materials, aus dem der Pfeiler aufgeführt wird, eine geringe Neigung dieses Pfeilers von D gegen F hin jedenfalls zulassen wird: seine Stabilität muss übrigens bei solcher Anordnung offenbar gross genug sein, um dem horizontalen Zuge, welcher in dem Aufhängepuncte D statt finden wird, und der dem Unterschiede der horizontalen Spannungen beider Kettenbogen gleich kommt, mit Sicherheit widerstehen zu können. Dieser Unterschied ist also, weil die wegen der Elastizität des Materials des Pfeilers eintretenden geringen Neigungen nur unmerkliche Veränderungen in der Pfeilhöhe beider Bogen zur Folge haben, wie für sich einleuchtet, gegeben durch

$$Q' - Q'' = \frac{qh^2}{2f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

Diese Kraft, mit der bis zum Aufhängepunkte der Ketten reichenden Höhe des Pfeilers multiplicirt, gibt sonach jenes auf die Drehungsachse H, um welche der Umsturz erfolgen müsste, bezogene statische Moment, welches für den Bestand des Pfeilers immer kleiner bleiben muss, als das auf dieselbe Achse H bezogene statische Moment seines eigenen Gewichtes und der vertikalen Pressungen, welche aus den tangentialen Spannungen der Bogen B und E bei C und D sich ergeben, und welche für den Bogen E durch

$$(p + q)\, h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

und für den Bogen B durch

$$ph \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

ausgedrückt werden; oder noch kürzer, es muss, wie diess schon im 73. Artikel gesagt wurde, das statische Moment des Pfeilergewichtes kleiner sein, als das auf die gemeinschaftliche Drehungsachse bezogene statische Moment der aus den beiderseitigen Kettenspannungen sich ergebenden, und nach den Untersuchungen des fünften Abschnittes ihrer Richtung und Grösse nach leicht zu bestimmenden Mittelkraft. Es vertritt nämlich hier die Spannung der Tragketten ABC jene dort in Rede gewesene Spannkettenspannung, und der Winkel α den in den dortigen Gleichungen enthaltenen Winkel ω, wenn anders die Aufhängewinkel beider Bogen ABC und DEF einander, und zwar dem Winkel α gleich sind; die erforderlichen Pfeilerdimensionen, um bei einer Ueberlastung einer der beiderseitigen Bahnen keinen Umsturz der Pfeiler besorgen zu dürfen, sind also jedenfalls leicht zu ermitteln.

82. Stehen dagegen die Ketten mit dem Mittelpfeiler in keiner Verbindung, und können sie insbesondere über die Pfeiler weggleiten, ohne

hierbei einen namhaften Reibungswiderstand überwinden zu müssen, so dass dieser füglich gleich Null angenommen werden kann, so wird bei der angeführten Ueberlastung der einen Bahn in der That auch so lange ein Gleiten der Ketten von *C*, *Fig.* 31, nach *D* hin über die Pfeiler weg, vor sich gehen, bis in Folge der Zunahme der Pfeilhöhe des einen Bogens *E* und der Abnahme der Pfeilhöhe des andern Bogens *B* die bei *C* und *D* stattfindenden tangentialen Spannungen beider Bogen einander gleich sind.

Bezeichnen wir daher mit f'' die neue Pfeilhöhe des Bogens *ABC*, mit f' jene, welche in dem Bogen *DEF* nach hergestelltem Gleichgewichte des ganzen Systems stattfindet, und mit T'' und T' die beziehungsweisen tangentialen Spannungen in den Aufhängepunkten dieser Bogen, so sind diese nach Art. (27) gegeben durch

$$T' = \frac{(p+q)\,h}{2f'}\sqrt{h^2 + 4f'^2}$$

und

$$T'' = \frac{ph}{2f''}\sqrt{h^2 + 4f''^2}$$

und es muss für den Zustand des Gleichgewichtes der Gleichung

$$\frac{p+q}{f'}\sqrt{h^2 + 4f'^2} = \frac{p}{f''}\sqrt{h^2 + 4f''^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

Folge geschehen, so dass es jetzt nur noch darauf ankommt, eine zweite, die Grössen f' und f'' enthaltende Gleichung zu finden, um aus diesen Gleichungen die Werthe dieser Grössen berechnen zu können.

Nun wird aber nach der Gleichung (16) Art. (21) die halbe Länge jedes der Bogen *B* und *E* für den ursprünglichen Zustand des Gleichgewichtes genau genug ausgedrückt durch

$$l = \left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{f}{h}\right)^2\right] h.$$

Werden nunmehr die den Pfeilhöhen f' und f'' entsprechenden halben Bogenlängen beziehungsweise durch l' und l'' dargestellt, so hat man hiefür genau genug

$$l' = \left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{f'}{h}\right)^2\right] h$$

und

$$l'' = \left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{f''}{h}\right)^2\right] h;$$

weil aber durch das Gleiten der Ketten von der einen nach der andern Seite ihre Gesammtlänge nicht verändert wird, so muss nothwendig

$$l' + l'' = 2l,$$

oder nach gehöriger Substitution und Reduktion

$$f'^2 + f''^2 = 2f^2$$

sein, woraus denn

$$f'' = \sqrt{2f^2 - f'^2}$$

gefunden wird.

Diesen Werth statt f'' in der vorhin aufgestellten Gleichgewichts-Bedin-

gungsgleichung eingeführt, gibt nach gehöriger Reduktion

$$f'^4 - \left[\frac{8f^2 - h^2}{4} - \frac{p^2h^2}{4pq + 2q^2}\right] f'^2 = \left[\frac{p^2h^2}{4pq + 2q^2} + \frac{h^2}{2}\right] f \quad \ldots \quad (117)$$

Nach dieser Gleichung kann nun, indem man $f'^2 = x$ also $f'^4 = x^2$ setzt, und sie sonach in eine quadratische verwandelt, die Pfeilhöhe f' in jedem speziellen Falle leicht berechnet werden.

Eliminirt man dagegen in der anfänglichen Gleichgewichts-Bedingungsgleichung die Grösse f' statt der Grösse f'', indem man darin

$$f' = \sqrt{2f^2 - f''^2}$$

setzt, so erhält man nach gehöriger Reduktion

$$f''^4 - \left[\frac{8f^2 + h^2}{4} + \frac{p^2h^2}{4pq + 2q^2}\right] f''^2 = \frac{p^2h^2f^2}{4pq + 2q^2} \quad \ldots \quad (118)$$

woraus denn für jeden gegebenen Fall die Pfeilhöhe f'' wird bestimmt werden können.

Nehmen wir nun, um beiläufig beurtheilen zu können, wie gross die Veränderungen der Pfeilhöhen für die, bei Kettenbrücken denkbaren Fälle wohl werden mögen, an, dass die zufällige Belastung der beständigen eben gleich kommt, also $p = q$ sei, da sich diess sehr leicht ergeben kann. Für eine solche Annahme geht die erste der eben entwickelten Endgleichungen über in

$$f'^4 - \left(\frac{24f^2 - 5h^2}{12}\right) f'^2 = \frac{2h^2f^2}{3}$$

und die andere in

$$f''^4 - \left(\frac{24f^2 + 5h^2}{12}\right) f''^2 = -\frac{h^2f^2}{6}.$$

Setzen wir nun

$$h = 9f,$$

also sehr flach gespannte Bögen voraus, als auf welche eine verschiedene Belastung beider Bögen den geringsten Einfluss hat, so verwandeln sich die letzten Gleichungen in

$$f'' + 31{\cdot}75\ f^2f'^2 = 54f^4$$

und in

$$f'^4 - 35{\cdot}75\, f^2f'^2 = -13.5f^4.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen wird

$$f' = f\sqrt{-15{\cdot}875 + \sqrt{306.015625}} = 2{\cdot}27\ f,$$

aus der andern

$$f'' = f\sqrt{17.875 - \sqrt{306{\cdot}015625}} = 0{\cdot}62\ f$$

gefunden.

Wird hingegen

$$h = 6f,$$

oder angenommen, dass die Bögen sehr tief gespannt werden, so gehen jene Gleichungen über in

$$f'^4 + 13f^2f'^2 = 24f^4$$

und in

$$f''^4 - 17f^2f'^2 = -6f^4,$$

woraus denn

$$f' = f\sqrt{-6{\cdot}5 + \sqrt{63{\cdot}75}} = 1{\cdot}28\,f$$

und

$$f'' = f\sqrt{8{\cdot}5 - \sqrt{63{\cdot}75}} = 0{\cdot}61\,f$$

erhalten wird.

Hieraus ist abzunehmen, dass das Verhältniss der neuen zu den ursprünglichen Pfeilhöhen sehr nahe dasselbe sei, wie flach man die Bogen innerhalb der für Kettenbrücken bestehenden Gränzen auch immer spannen mag; dass aber die absolute Senkung oder Hebung des Scheitels bei einerlei Spannweite um so geringer werde, je flacher der Bogen gespannt, d. i. je kleiner seine Pfeilhöhe ist. So wird für die, im 34. Artikel besprochene Brücke von 300 Fuss Spannweite, wenn die Pfeilhöhe $= {}^1/_{18}$ der Spannweite, oder $= 16{\cdot}67$ Fuss gemacht wird, die Senkung der einen Bahn im Scheitel

$$21{\cdot}17 - 16{\cdot}67 = 4{\cdot}5 \text{ Fuss},$$

die Hebung der andern Bahn aber in ihrer Mitte

$$16{\cdot}67 - 10{\cdot}33 = 6{\cdot}34 \text{ Fuss}$$

betragen. Macht man hingegen die Pfeilhöhe $= {}^1/_{12}$ der Spannweite, oder $= 25$ Fuss, so wird sich bei der angeführten Ueberlastung, der Scheitel des einen Bogens um

$$32 - 25 = 7 \text{ Fuss}$$

senken; jener des andern aber um

$$25 - 15{\cdot}25 = 9{\cdot}75 \text{ Fuss}$$

erheben.

Wenn wir daher auch zugeben, dass wegen der stets mehr oder weniger grossen Unbiegsamkeit oder Steifigkeit der Bahn diese Veränderungen der Pfeilhöhe nicht ganz erreicht werden, so werden sie dennoch immer bedeutend genug sein, um die Ketten nie ganz frei über die Pfeiler gleiten lassen zu dürfen, wenn man die Brücke nicht der Gefahr aussetzen will, dass bei einer bedeutenden Ueberlastung der einen Bahn das Brechen der Bahnbestandtheile, oder mindestens auf die Passage sehr nachtheilig rückwirkende Neigungen und Steigungen derselben eintreten werden. Um so weniger wird man also, ohne sich diesen Inkonvenienzen auszusetzen, die Ketten in jenen Fällen frei über die Pfeiler wegführen dürfen, wo die Brückenbahn, von drei oder mehreren, nach einander folgenden Bogen getragen wird; daher jede weitere Untersuchung hierüber als überflüssig sich erweist.

83. Gehen wir nunmehr zu der Untersuchung über, welche Veränderungen in der Pfeilhöhe der bisher betrachteten beiden Kettenbogen *ABC* und *DEF Fig.* 31, alsdann in Folge der Ueberlastung des Bogens *DEF* vor sich gehen, wenn das Gleiten der Ketten über die Mittelpfeiler durch eine stattfindende Reibung mehr oder weniger erschwert wird.

Aus den Untersuchungen, die wir im fünften Abschnitte über den Ein-

fluss der Reibung auf die Spannung und das Gleiten der Ketten vorgenommen haben, erhellt, mit Rücksicht auf den Umstand, das für den vorliegenden Fall

$$w = \alpha$$

ist, dass wegen dieses Reibungswiderstandes kein Gleiten der Ketten von B nach E über den Mittelpfeiler eintreten kann, so lange

$$T'' = T'\left[1 - \frac{\alpha\pi\varphi}{90} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^2 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right) + \tfrac{1}{24}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^4 - \ldots\right]$$

ist, in welcher Gleichung T'' die unter der Einwirkung der beständigen Belastung, und T' die unter der Einwirkung der beständigen und einer so grossen zufälligen Belastung stattfindende tangentiale Spannung in den Aufhängepunkten der Bogen B und E bezeichnet, dass durch das Hinzukommen derselben eben noch kein Gleiten der Ketten hat bewirkt werden können. Bezeichnet q diese zufällige Ueberlast, so ist für die vorliegende Gleichung

$$T' = \frac{(p+q)\,h}{2f}\sqrt{h^2 + 4f^2}$$

und

$$T'' = \frac{ph}{2f}\sqrt{h^2 + 4f^2}.$$

Substituirt man daher diese Grössen in der vorhergehenden Gleichgewichtsbedingungsgleichung, so geht dieselbe über in

$$p = (p+q)\left[1 - \frac{\alpha\pi\varphi}{90} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^2 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^3 + \tfrac{1}{24}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^4 - \ldots\right] \ldots (119)$$

woraus dann folgt, dass das Gleiten erst alsdann auf dem Punkte steht eintreten, wenn

$$q = \left\{\frac{\frac{\alpha\pi\varphi}{90} - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^3 - \frac{1}{24}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^4 + \ldots\ldots}{1 - \frac{\alpha\pi\varphi}{90} + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^4 - \ldots\ldots}\right\} p$$

oder wenn

$$q = \left[\frac{\alpha\pi\varphi}{90} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^3 + \tfrac{1}{24}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^4 + \ldots\right] p \ldots (120)$$

geworden ist.

Setzen wir z. B. $\alpha = 15$ Grad, $\varphi = 0{\cdot}3$, so wird das Gleiten der Ketten über die Pfeiler erst alsdann sehr nahe zu gewärtigen sein, wenn

$$q = [0{\cdot}1571 + 0{\cdot}0123 + 0{\cdot}0006]\, p = 0{\cdot}17\, p$$

wird. Wäre dagegen für $\alpha = 15$ Grad, $\varphi = 0{\cdot}5$, so wird jenes Gleiten erst alsdann zu befürchten sein, wenn die zufällige Belastung q so weit anwächst, dass sie die Gränze

$$q = [0{\cdot}2618 + 0{\cdot}0343 + 0{\cdot}0030 + 0{\cdot}0002]\, p = 0{\cdot}2993 p$$

erreicht.

Weil nun aber die zufällige Belastung nicht nur bis zu einem Sechstheile, oder bis zu einem Drittheile der beständigen steigen, sondern dieser sehr leicht gleich, ja auch grösser als letztere werden kann, so lassen die eben berechneten Beispiele, da in dem letztern der Reibungs-Koefizient φ

schon sehr gross angenommen wurde, schliessen, dass der Einfluss der Reibung das Gleiten der Ketten auch nur sehr selten verhindern wird, und wir haben also wirklich noch zu ermitteln, welches die Gränze ist, bis zu der, unter der Einwirkung dieser Reibung, bei der zufälligen Ueberlastung der einen Bahn Veränderungen in dem ganzen Brückensysteme möglich sind.

84. Bezeichnen wir zu diesem Ende abermal mit f' die in dem Bogen *DEF*, *Fig.* 31, und mit f'' die in dem Bogen *ABC* alsdann stattfindende Pfeilhöhe, und mit T' und T'' die zugehörigen tangentialen Spannungen in den Aufhängepunkten, wenn das durch die Ueberlastung des Bogens *DEF* bewirkte Gleiten der Ketten bereits aufgehört hat. Offenbar tritt dieser Gleichgewichtszustand erst alsdann ein, wenn in Folge der mit dem Gleiten der Ketten sich ändernden Spnnnungs-Verhältnisse

$$T'' = T' \left[1 - \frac{\alpha\pi\varphi}{90} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^2 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^3 + \tfrac{1}{24}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^4 - \ldots\right]$$

geworden ist, indem der Werth der Summe der Winkeln $(\alpha' + \alpha'')$, welche die beiderseitigen Ketten im Zustande dieses endlichen Gleichgewichtes mit dem Horizonte einschliessen, anstandslos $= 2\alpha$ gesetzt werden kann, um so mehr, als der Reibungskoefizient φ immer mit noch viel minderer Genauigkeit ermittelt werden kann.

Substituiren wir jetzt in der letzten Gleichung die den Grössen T' und T'' nach dem vorhergehenden Artikel zukommenden Werthe, indem wir q in dem Sinne der für die Einheit der Spannweite entfallenden grösstmöglichen zufälligen Belastung nehmen, so geht sie nach geschehener Reduktion über in

$$\frac{p}{f''}\sqrt{h^2+4f''^2} = \left\{1 - \frac{\alpha\pi\varphi}{90} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^2 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^3 + \tfrac{1}{24}\left(\frac{\alpha\pi\varphi}{90}\right)^4 + \ldots\right\}\frac{p+q}{f'}\sqrt{h^2+4f'^2} \quad \ldots (121)$$

worin also in jedem speziellen Falle, je nachdem man darin nach Artikel (82)

$$f'' = \sqrt{2f^2 - f'^2}, \quad \text{oder} \quad f' = \sqrt{2f^2 - f''^2}$$

einführt, nur mehr eine Unbekannte enthalten sein wird, ihre Bestimmung wird daher hieraus ohne Anstand geschehen können. Nach gehöriger Substitution ergeben sich auf solchem Wege folgende zwei Gleichungen:

$$f'^4 - \left[\frac{r^2(p+q)^2(8f^2-h^2) - p^2(8f^2+h^2)}{4(r^2(p+q)^2 - p^2)}\right]f'^2 = \frac{r^2f^2h^2(p+q)^2}{2(r^2(p+q)^2 - p^2)} \quad \ldots (122)$$

und

$$f''^4 - \left[\frac{r^2(p+q)^2(h^2+8f^2) - p^2(h^2-8f^2)}{4(r^2(p+q)^2 - p^2)}\right]f''^2 = -\frac{p^2f^2h^2}{2(r^2(p+q)^2 - p^2)} \quad \ldots (123)$$

wenn die in der Gleichung (121) zwischen den Klammern liegende Reihungsreihe mit r bezeichnet wird.

Sei nun wieder $p = q$, und $h = 6f$, also $\alpha = 18^0 - 26'$; für diese Annahme gehen die vorliegenden Gleichungen über in

$$f'^4 + \left[\frac{112r^2 + 44}{4(4r^2-1)}\right]f'^2f^2 = \frac{144r^2f^4}{2(4r^2-1)}$$

und in

$$f''^4 - \left[\frac{176r^2 + 28}{4(4r^2-1)}\right] f''^2 f^2 = - \frac{36f^4}{2(4r^2-1)}.$$

Ist nun überdies der Reibungs-Koeffizient

$$\varphi = 0{\cdot}3,$$

so ist

$$r = 1 - 0{\cdot}1930 + 0{\cdot}0186 - 0{\cdot}0012 = 0{\cdot}8244.$$

Dieser Werth in den beiden letzten Gleichungen eingeführt, gibt

$$f'^4 + 17{\cdot}4739 f'^2 f^2 = 28{\cdot}4739 f^4$$

und

$$f''^4 - 21{\cdot}4739 f''^2 f^2 = - 10{\cdot}4739 f^4$$

woraus

$$f' = f\sqrt{-8{\cdot}7364 + \sqrt{104{\cdot}7985}} = 1{\cdot}22 f$$

und

$$f'' = f\sqrt{10{\cdot}7364 - \sqrt{104.7985}} = 0{\cdot}71 f$$

gefunden wird.

Wäre hingegen der Reibungs-Koeffizient

$$\varphi = 0{\cdot}5,$$

so würde

$$r = 1 - 0{\cdot}3217 + 0{\cdot}0517 - 0{\cdot}0055 = 0{\cdot}7245,$$

welcher Werth in den letzten allgemeinen Gleichungen eingeführt, dieselbe verwandelt in

$$f'^4 + 23{\cdot}3693 f'^2 f^2 = 34.3693 f^4,$$

und in

$$f''^4 - 27{\cdot}3693 f''^2 f^2 = 16.3693 f^4,$$

woraus endlich

$$f' = f\sqrt{-11{\cdot}6846 + \sqrt{170{\cdot}8990}} = 1{\cdot}18 f$$

und

$$f'' = f\sqrt{13.6846 - \sqrt{170{\cdot}8990}} = 0{\cdot}78 f$$

sich ergibt.

Setzt man in den Gleichungen (122) und (123)

$$p = q, \text{ und } h = 9f, \text{ also } \alpha = 12^0 - 31',$$

so gehen sie über in

$$f'^4 + \left[\frac{292r^2 + 89}{4(4r^2-1)}\right] f'^2 f^2 = -\frac{324r^2 f^4}{2(4r^2-1)},$$

und in

$$f''^4 - \left[\frac{356r^2 + 73}{4(4r^2-1}\right] f''^2 f^2 = - \frac{81f^4}{2(4r^2-1)};$$

Ist nun abermal vorerst der Reibungs-Koflizient

$$\varphi = 0{\cdot}3;$$

so ergibt sich

$$r = 1 - 0{\cdot}1309 + 0{\cdot}0086 - 0{\cdot}0004 = 0{\cdot}8773,$$

und man erhält durch Einführung dieses Werthes in die vorstehenden Gleichungen

$$f'^4 + 37{\cdot}7361 f'^2 f^2 = 59{\cdot}9861 f^4,$$

und

$$f'' - 41{\cdot}7361 f''^2 f^2 = -19{\cdot}4861 f^4;$$

aus diesen Gleichungen findet man

$$f' = f\sqrt{-18{\cdot}8681 + \sqrt{415{\cdot}9914}} = 1{\cdot}24 f,$$

und

$$f'' = f\sqrt{20.8681 - \sqrt{415.9914}} = 0{\cdot}69 f.$$

Ist hingegen der Reibungs-Koeffizient

$$\varphi = 0{\cdot}5$$

so erhält man

$$r = 1 - 0{\cdot}2182 + 0{\cdot}0238 - 0{\cdot}0017 = 0{\cdot}8039,$$

wodurch obige Gleichungen übergehen in

$$f'^4 + 43{\cdot}8021 f'^2 f^2 = 66{\cdot}0521 f^4,$$

und in

$$f''^4 - 47{\cdot}8021 f''^2 f^2 = -25{\cdot}5321 f^4;$$

hieraus wird

$$f' = f\sqrt{-21.9011 + \sqrt{545.7103}} = 1{\cdot}21 f$$

und

$$f'' = f\sqrt{23{\cdot}9011 - \sqrt{545{\cdot}7103}} = 0{\cdot}73 f$$

gefunden.

Aus diesen Beispielen können wir abnehmen, dass, wenn die Reibung berücksichtigt wird, das flächere Spannen der Ketten die, aus den ungleichen Belastungen beider Bahnen entstehenden Schwankungen ebenfalls vermindert, da die Zahlen, welche das Verhältniss der alten zu den neuen Pfeilhöhen bei einerlei Reibungs-Koeffizienten, aber verschiedener Kurvenbeugung bezeichnen, sehr wenig verschieden sind, während die, diesen Zahlen zu Grunde liegenden Pfeilhöhen bei einerlei Spannweite bedeutend von einander abweichen.

So ist für $h = 150$ Fuss, $f = {}^1/_6\ h = 25$ und $\varphi = 0.3$

$$f' - f = 5{\cdot}5 \text{ Fuss, und } f - f'' = 7.25 \text{ Fuss;}$$

für $\varphi = 0{\cdot}5$ wird unter diesen Umständen

$$f' - f = 4{\cdot}5 \text{ Fuss und } f - f'' = 5{\cdot}5 \text{ Fuss.}$$

Wäre dagegen $h = 150$ Fuss, $f = {}^1/_9\ h = 16{\cdot}67$ Fuss und $\varphi = 0{\cdot}3$, so würde

$$f' - f = 4 \text{ Fuss, und } f - f'' = 5{\cdot}17 \text{ Fuss;}$$

für $\varphi = 0{\cdot}5$ aber ist unter diesen Verhältnissen

$$f' - f = 3{\cdot}5 \text{ Fuss, und } f - f'' = 4{\cdot}5 \text{ Fuss.}$$

In dem ungünstigsten der eben berechneten vier Fälle, nämlich für $f' - f = 5{\cdot}5$ Fuss, und $f - f'' = 7{\cdot}25$ Fuss, wird also die halbe Länge

des Bogens *DEF* gemäss der Gleichung (51) Art. (45) zunehmen um die Grösse

$$l' - l = \frac{2.5 \cdot 5}{3.150} (2.25 + 5 \cdot 5) = 1 \cdot 357 \text{ Fuss.}$$

dagegen jene des halben Bogens *ABC* abnehmen um die Grösse

$$l - l'' = \frac{2.7 \cdot 25}{3,150} (2.25 - 7.25) = 1 \cdot 375 \text{ Fuss}$$

Im günstigsten Falle dagegen, oder für $f' - f = 3 \cdot 5$ Fuss, und $f - f'' = 4 \cdot 5$ Fuss wird der halbe Bogen *DEF* sich verlängern um die Grösse

$$l' - l = \frac{2.3 \cdot 5}{3.150} (2.16.67 + 3 \cdot 5) = 0 \cdot 573 \text{ Fuss,}$$

der halbe Bogen *ABC* dagegen sich verkürzen um die Grösse

$$l - l' = \frac{2.4 \cdot 5}{3.150} (2.16 \cdot 67 - 4 \cdot 5) = 0 \cdot 575 \text{ Fuss,}$$

welche Resultate, da sich die eine Kette durch das Gleiten über den Pfeiler nur so viel verlängern kann, als die andere hierdurch verkürzt wird, die zureichende Genauigkeit der abgeleiteten Formeln genügend an Tag legen.

Endlich wird, wie man sieht, das ganze Gleiten der Ketten im ungünstigsten Falle 2·732 Schuh, und im günstigsten Falle noch immer 1·148 Schuh betragen.

85. Diese Resultate geben zu erkennen, dass bei einem selbst bedeutenden Reibungswiderstande, und einer mit verbundenen sehr flachen Bogenspannung durch die, der beständigen gleichkommende, zufällige Belastung einer der zwei, an symetrischen und gleicharmigen parabolischen Bogen hängenden Bahnen, Senkungen und Hebungen in beiden vor sich gehen, welche sowohl auf den Bestand der Brückenbahn, als auch auf die Passage sehr nachtheilig zurück wirken. Weil daher solche Veränderungen in keinem Falle zugelassen werden dürfen, so wird man im Allgemeinen, sobald für die besprochene Konstruktionsweise der tragenden Bogen die Anlage von Mittelpfeilern nothwendig, und eine der beständigen Belastung, wenn auch nur gleichkommende zufällige Ueberlastung der einen Bahn möglich ist, die Ketten in der Art mit dem Mittelpfeiler in Verbindung zu bringen haben, dass ausser dem, wegen der abfälligen Dehnbarkeit der, diese Verbindung bewirkenden Ketten, entstehendem Gleiten, keine andere Bewegung der Tragketten über die Mittelpfeiler eintreten könne. Selbst das Bestehen mehrerer Brücken, bei welchen diese Vorsicht allfällig ausser Acht gelassen wurde, würde das Gesagte nicht widerlegen, da wir aus dem Vorhergehenden wissen, dass erst, wenn die einseitige zufällige Ueberlastung bei einer Pfeilhöhe, die nahe $^1/_{15}$ der Spannweite beträgt, auf $^1/_6$ bis $^1/_3$ der beständigen Last anwächst, das Gleiten überhaupt anfange, und dass die hieraus entstehenden Schwankungen die berechneten Grenzen erst erreichen, wenn die zufällige Ueberlastung der einen Bahn ihrer beständigen Last gleich kommt, so bedeutende einseitige Ueberlastungen aber nur durch ganz ausserordentliche Umstände veranlasst werden können, und daher bei vielen Brücken gar nie eintreten werden; sie sind z. B. nur denkbar zu

Kriegszeiten, wo ein geschlagener Heerhaufen über eine solche Brücke die Flucht ergreift; oder wo sie, zunächst, oder zwischen volksreichen Orten erbaut, bei Wasser- oder Feuergefahr einem plötzlichen Andrange einer grössern Menschenmenge ausgesetzt ist; aber gerade für diese Fälle ist ihre Ausdauer am nothwendigsten, und jede Gefahr einer Zerstörung am fernsten zu halten. Diese Gefahr trifft übrigens, wie gesagt, nur den Zusammenhang der Bahnbestandtheile; für die Pfeiler ist durch das Eintreten der für den neuen Gleichgewichtszustand erforderlichen beiderseitigen Pfeilhöhen nichts zu besorgen, da ihre Stabilität gross genug sein muss, und leicht gross genug gemacht werden kann, um auch dem allfälligen grössten Unterschiede der beiderseitigen horizontalen Spannungen mit Sicherheit widerstehen zu können; wann dieser Unterschied am grössten werde, hängt davon ab, ob $\frac{(p+q)\,h^2}{2f'} - \frac{ph^2}{2f''}$ grösser oder kleiner ist als $\frac{(p+q)\,h^2}{2f} - \frac{ph^2}{2f}$ oder ob $\frac{p+q}{f'} - \frac{p}{f''} \gtrless \frac{q}{f}$

ist, wo in dem ersten Theile q die grösstmögliche zufällige Belastung überhaupt, in dem andern hingegen q nur jene zufällige Belastung bezeichnet, welche nach Art. (83) eben noch kein Gleiten der Ketten von der einen nach der andern Seite zu bewirken vermag. Indem man sich daher in jedem gegebenen Falle, wo man die Ketten dennoch frei über die Mittelpfeiler weggleiten lässt, hierüber Rechenschaft gibt, wird man auch die, alsdann denselben zu gebende Stärke zu ermitteln im Stande sein; so wie denn in einem solchen Falle auch dafür gesorgt werden müsste, dass die Bahn trotz aller Steifigkeit in den, der Gefahr des Brechens leicht unterliegenden Bestandtheilen dennoch die nöthige Beweglichkeit behalte, um die bei dem erfolgenden Gleiten der Ketten eintretenden Schwankungen ohne Gefahr erleiden zu können.

Eine Verminderung oder Vermeidung der fraglichen Schwankungen kann übrigens nicht nur durch die Verbindung der Ketten mit dem Mittelpfeiler, sondern auch durch eine zureichende, mittelst Sprengwerken vergrösserte Unbiegsamkeit der Bahn, oder durch, unter der Bahn liegende, in den Widerlagern und Pfeilern befestigte, nach oben konvex gespannte, mit der Brückenbahn in Verbindung stehende Ketten, wie diess bei der, auf der Insel Bourbon erbauten Kettenbrücke geschen ist, bewirkt werden.

Endlich ist klar, dass das Gleiten der Ketten über die Mittelpfeiler bei Brücken von bedeutender Spannweite wegen des mit dieser wachsenden Gewichtes der Ketten selbst bei der ungünstigsten einseitigen Belastung unbedeutend und gefahrlos bleiben könne; so wird bei einem Bogen von 800 Fuss Spannweite das Gewicht der Ketten für den laufenden Schuh schon an 2500 Pfund betragen; rechnen wir hiezu jenes der Bahn und Hängestangen mit 1500 Pfund, so belauft sich die ganze beständige Belastung auf 4000 Pfund, daher die grösstmögliche zufällige Ueberlast nur bis zur Hälfte der letztern wird steigen können. Bei einer Spannweite von 600 Fuss ist die grösstmögliche zufällige Belastung der beständigen im Allgemeinen ungefähr

gleich ; unter dieser Grenze daher erstere im Allgemeinen immer grösser als die letztere.

86. Eine besondere Beachtung verdient noch jene Anordnung, wo die beiderseits des Mittelpfeilers befindlichen Bahnen von zwei gleichen parabolischen Kettenbogen *BM* und *CN*, *Fig.* 32, getragen werden, deren Scheitel *O* und *L* tiefer als die Endepunkte *M* und *N* dieser Ketten liegen. Bezeichnen wir mit *f* und *h* die Pfeilhöhe und halbe Spannweite jenes Bogens, wovon *BM* und *CN* die Segmente bilden, mit *a* die Spannlänge *BE* und *CF* dieser Segmente, mit *b* ihre Spannhöhe *EM* und *FN*, so ist vor Allem die Beziehung, in der diese Grössen im Zustande der gleichförmigen Belastung beider Bahnen zu einander stehen, nach Gleichung (12) Art. (13) gegeben durch

$$f - b = \frac{f\,(h-a)^2}{h^2}\,; \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (124)$$

ist daher die Höhe des Mittelpfeilers und hiemit die Spannhöhe *a*, und die Entfernung der Punkte *M* und *N*, von *A* und *D*, und hiemit die Spannlänge *b* festgesetzt, so bedingt sich nach dieser Gleichung, wie diess aus dem 80. Artikel näher hervorgeht, *f* oder *h*, je nachdem man für *h* oder *f* einen bestimmten Werth feststellt.

Stellt nun wieder *p* das von der beständigen, und *q* das von der zufälligen Belastung der Einheit der Spannlänge entfallende Gewicht vor, so wird, wenn wieder *CN* als der überlastete Bogen angenommen wird, in Folge dieser Ueberlastung, wenn wir von dem Einflusse der Reibung absehen, ein Gleiten der Ketten von der unbelasteten nach der überlasteten Seite, oder von *M* nach *N* so lange statt haben, bis in Folge der hiemit sich ändernden Form und Natur der Kurven, die in den Aufhängepunkten *B* und *C* stattfindenden tangentialen Spannungen einander gleich werden. Die Form dieser Kurven wird ohngefähr jene sein, welche durch die Linien *BRMJ* und *CTNK* angedeutet ist; indem sonach *J* und *K* die Scheiteln der neuen Kurven sind, wird angedeuteter Weise eine Veränderung sowohl in der Pfeilhöhe *f*, als in der halben Spannweite *h* in beiden Kurven erfolgen. Die Beziehungen, in welchen diese neuen Spannweiten und Pfeilhöhen, und die Grössen *a* und *b* zu einander sich befinden, werden ausgedrückt durch die Gleichungen

$$f' - b = \frac{f'\,(h'-a)^2}{h'^2}$$

und

$$f'' - b = \frac{f''\,(h''-a)^2}{h''^2}\,;$$

hieraus wird

$$h' = a\left[\frac{f''}{b} \pm \sqrt{\frac{f''^2}{b^2} - \frac{f'}{b}}\right] \qquad \ldots \quad (125)$$

und

$$h'' = a\left[\frac{f''}{b} \pm \sqrt{\frac{f''^2}{b^2} - \frac{f'}{b}}\right] \qquad \ldots \quad (126)$$

gefunden. Dadurch, dass man die eben gefundenen Werthe in der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungsgleichung des vorliegenden Falles, nämlich in der Gleichung

$$\frac{(p+q)\,h''^2}{2f'}\sqrt{h'^2+4f'^2}=\frac{ph''^2}{2f''}\sqrt{h''^2+4f''^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

substituirt, wird man eine Gleichung erhalten, die nur mehr die zwei Unbekannten f' und f'' enthält. Eine zweite, ebenfalls nur mehr diese beiden Unbekannten enthaltende Gleichung aber wird sich ergeben, indem man die Pfeilhöhe f' und die zugehörige durch f', nach der Gleichung (124) ausgedrückte Spannweite $h_,$; so wie die Pfeilhöhe f'', und die zugehörige, durch f'' nach der Gleichung (125) ausgedrückte Spannweite h'' bei der Berechnung der Bogenlängen BRM und CTN, indem man diese nach den Andeutungen des 80. Art. vornimmt, zu Grunde legt, und die Summe dieser beiden Längen der ursprünglichen Länge der beiden Bogen BM und CN gleich setzt. Es ist nämlich genau genug

$$l' = h'\left[1+\tfrac{2}{3}\left(\frac{f'}{h'}\right)^2\right]-(h'-a)\left[1+\tfrac{2}{3}\left(\frac{f'-b}{h'-a}\right)^2\right]$$

$$l'' = h''\left[1+\tfrac{2}{3}\left(\frac{f''}{h''}\right)^2\right]-(h''-a)\left[1+\tfrac{2}{3}\left(\frac{f''-b}{h''-a}\right)^2\right]$$

$$l = h\left[1+\tfrac{2}{3}\left(\frac{f}{h}\right)^2\right]-(h-a)\left[1+\tfrac{2}{3}\left(\frac{f-b}{h-a}\right)^2\right]$$

oder nach gehöriger Reduktion

$$l' = a-\frac{2\,(af'^2-2bf'h'+b^2h')}{3h'\,(h'-a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

$$l'' = a-\frac{2\,(af''^2-2bf''h''+b^2h'')}{3h''\,(h''-a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

$$l = a-\frac{2\,(af^2-2bfh+b^2h)}{3h\,(h-a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

Setzt man daher die Summe der Gleichungen (128) und (129) der doppelten Gleichung (130) gleich, und führt man darin statt h' und h'' die oben durch die Gleichungen (125) und (126) gegebenen Werthe ein, so erhält man die gesuchte zweite, nur mehr die Unbekannten f' und f'' enthaltende Gleichung. Berechnet man daher aus beiden, nur diese Unbekannten enthaltenden Gleichungen eine derselben, und setzt man die hiefür aus beiden sich ergebenden Werthe einander gleich, so gelangt man endlich zu einer Gleichung, in der nur mehr eine Unbekannte vorkommt, daher dieselben hieraus bestimmt werden können. Durch rückschreitende Substituirung lassen sich sofort auch alle übrigen unbekannten Grössen ohne Anstand ermitteln.

Ist endlich auf diesem Wege die Pfeilhöhe und die Spannweite für die beiden neuen Kurven gefunden, so wird man durch Vergleichung der gleichweit von M oder N abstehenden Ordinaten, indem man sie für den ursprünglichen und den geänderten Zustand berechnet, die Senkungen und Hebungen finden, welche bei einer solchen Anordnung zu gewärtigen sind.

Wäre der Einfluss der Reibung mit zu berücksichtigen, so würde, wie diess für sich klar ist, der erste Theil der Gleichgewichtsgleichung (127) mit der im vorigen Artikel durch r ausgedrückten Reibungsreihe zu multiplizieren sein.

Indem man daher in jedem speziellen Falle die besprochenen Berech-

nungen vornimmt: wird man aus den sich ergebenden Resultaten schliessen können, ob es räthlich ist, die Ketten frei über die Pfeiler gleiten zu lassen, oder nicht; beiläufig lässt sich nämlich beurtheilen, dass, wenn bei solchen Anordnungen die Ketten ihrer Sehne sich möglichst nähernd gespannt werden, das Gleiten auch nie von besonderer Bedeutung werden könne.

Hiermit ist denn auch der Weg angedeutet, auf welchem alle übrigen, in Bezug des möglichen Gleitens der Ketten über die Mittelpfeiler, und der dadurch bewirkt werdenden Schwankungen der Bahnen allfällig vorkommenden Fragen beantwortet werden können.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Seite

Ableitung der Gleichung und graphische Konstruk ion der Krummen, we che die Tragketten bilden. 1

Zweiter Abschnitt.

Länge der krummen bei gegebener Spannweite und Pfeilhöhe; und Pfeilhöhe der Krummen bei gegebener Spannweite und Länge der Ketten 17

Dritter Abschnitt.

Grösse des erforderlichen Kettenquerschnittes und Grenze der ausführbaren Kettenspannweiten 33

Vierter Abschnitt.

Veränderungen, welche in der Länge, Spannweite und Pfeilhöhe der Ketten überhaupt bewirkt werden können, und Einfluss derselben auf die Krümmung, den Aufhängewinkel und die Spannung der Ketten 45

Fünfter Abschnitt.

Einfluss der Tragkettenspannung auf die Spannung der Spannketten, und Einfluss beider Spannungen auf die Standfestigkeit der Pfeiler 58

Sechster Abschnitt.

Einfluss vertikaler Spannketten auf den detrusiven und statischen Widerstand der Pfeiler, und Einfluss vertikaler und geneigter Spannketten auf die Wurzelbefestigung dieser Ketten 77

Siebenter Abschnitt.

Einfluss der Spannkettenbeugung auf die Beweglichkeit der Stützen, und das Gleiten der Ketten über die Pfeiler, und Einfluss der einseitigen Ueberlastungen durch Mittelpfeiler getrennter Brückenbahnen auf das Schwanken der letztern . . . 90

Berichtigungen.

Seite	Zeile	ist statt	zu lesen
4	22 von unten	fragliche	fragliche
8	16 von oben	Spannungen, des	Spannungen des
9	14 von unten	bildende	bleibende
10	7 von oben	$-P$	P
10	25 „	$\frac{V}{P}$	$\frac{V}{P}$
10	31 „	$\frac{V}{P}$	$\frac{V}{P}$
12	1 „	$tang\,\alpha^n$	$tang\,\alpha^n)$
12	19 „	$tang\,x^n = 0$	$tang\,\alpha^n = o$
12	13 von unten	$\frac{hy}{Fx}$	$\frac{hy}{fx}$
13	12 „	$\frac{f2}{h}$	$\frac{2f}{h}$
15	17 „	Oc'''	Ob'''
17	12 von oben	dle	die
19	4 von unten	$tang^3\,\alpha'$	$tang^4\,\alpha'$
25	11 von oben	jene	jener
25	21 „	Anordnung	Anwendung
27	18 „	$\frac{3a^3}{5}$	$\frac{3a^2}{5}$
27	9 von unten	$\left(\frac{l-h}{h}\right)^3$	$\left(\frac{l-h}{h}\right)^3$
31	1 „	$li =$	$h =$
33	4 von oben	eiften	eilften
33	14 „	Art. (1)	Art. (11)
33	16 „	Gleichung 2)	Gleichung (2)
34	10 „	$T = \frac{ph}{2f}\sqrt{h^2+4f^4}$	$T = \frac{ph}{2f}\sqrt{h^2+4f^2}$
37	14 „	$-h\bar{\omega}$	$-h\sigma$
38	2 von unten	$\sigma l\sqrt{h^3+4f^3}$	$\sigma l\sqrt{h^3+4f^2}$
40	14 von oben	17361. Pfund	17361 Pfund
42	11 von unten	das	dass
43	3 von oben	Hingegen	hingegen
46	5 „	aufhören. sobald	aufhören, sobald
46	21 „	betraehlcten	betrachteten
50	6 von unten	$\frac{27}{20}$	$\frac{27}{20}$
53	15 „	$\frac{27}{20}$	$\frac{2}{20}$
53	15 „	$\frac{81}{175}\left(\frac{l\pm\delta\quad h}{h}\right)^3$	$\frac{81}{175}\left(\frac{l\pm\delta-h}{h}\right)^3$
55	11 „	$\pm\frac{3d}{4f}(2h-l)$	$\pm\frac{3d}{4f}(2h-l)$
56	16 von oben	$\frac{27}{20}\left(\frac{l\pm\delta\quad h\pm d}{h\mp d}\right)^2$	$\frac{27}{20}\left(\frac{l\pm\delta-h\pm d}{h\mp d}\right)^2$

Seite	Zeile		ist statt	zu lesen
56	22	von oben	$\frac{3}{4f}\,[\,h(\pm 2d + \delta) \mp dl)\,]$	$\frac{3}{4f}\,[\,h(\pm 2d \pm \delta) \mp dl\,]$
61	22	„	$R = T\,\frac{Cos\,(\alpha-\beta)}{Cos\,(w-\beta)}$	$R = T\,\frac{Cos\,(\alpha+\beta)}{Cos\,(w-\beta)}$
62	20	„	$P = T\,\frac{Sin\ (\alpha+w)}{Cos\left(\frac{(\alpha+w)}{2}\right)}$	$P = T\,\frac{Sin\ (\alpha+w)}{Cos\left(\frac{\alpha+w}{2}\right)}$
62	14	von unten	werden. welche	werden, welche
66	21	„	über ein. beide	über ein, beide
77	12	„	vertikalen	Vertikalen
01	10	von oben	$f' = y' = b$	$f' = y' + b$
94	12	„	$2aQ$	$2aQ'$
94	16	„	$+\ Sl\ \beta\ tang\ w$	$+\ Sin\,\beta\ tang\,w$
93	3	„	$y = \frac{p}{2Q}\left(\frac{2bQ \quad p'\,(a+d)^2}{2p'\,(a+d)}\right)^2$	$y = \frac{p}{Q}\left(\frac{2bQ - p'\,(a+d)^2}{2p'\,(a+d)}\right)^2$

Taf. 1.

Fig. 1.

Fig. 2.

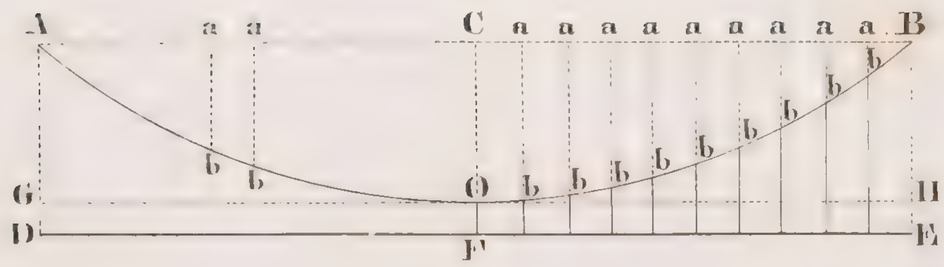


Fig. 3.

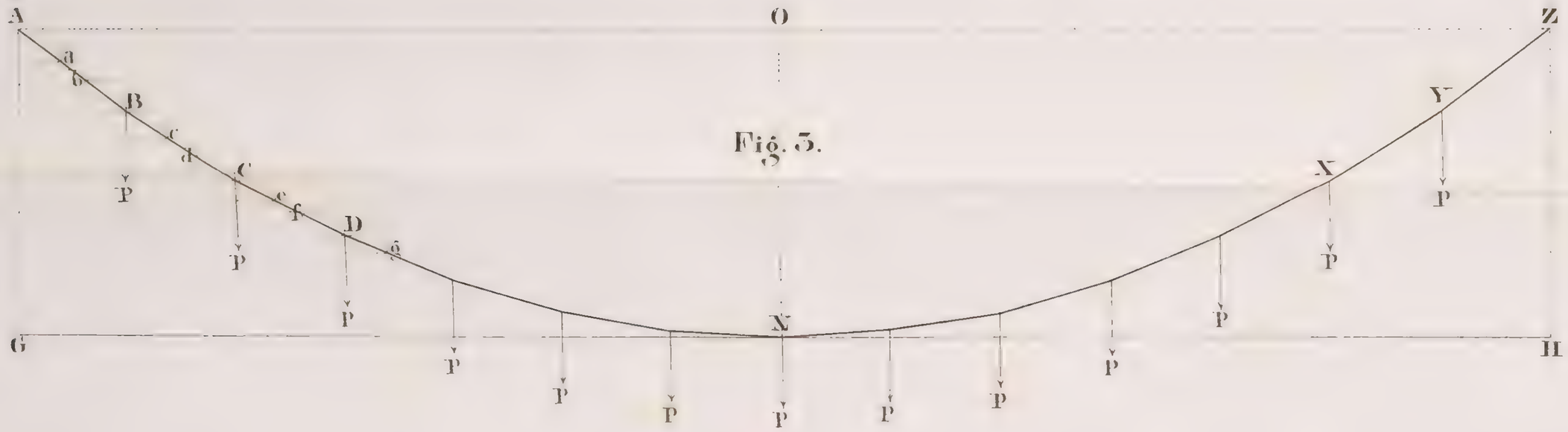


Fig. 4.

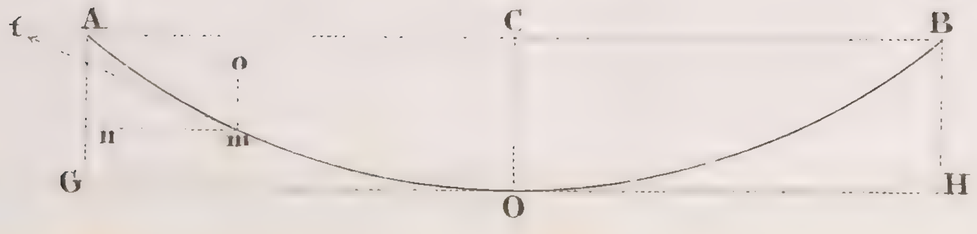


Fig. 5.

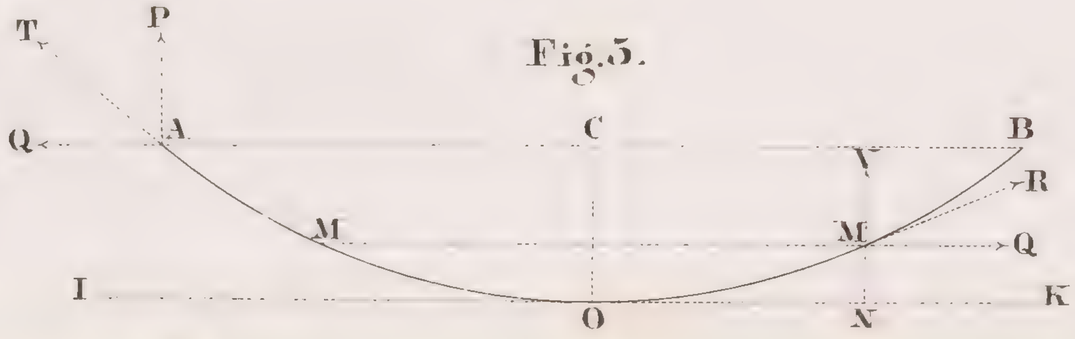


Fig. 6.

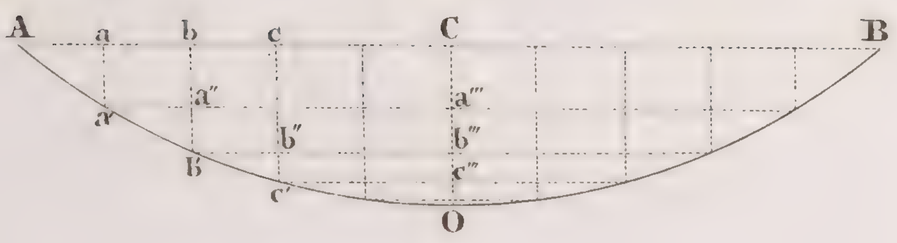
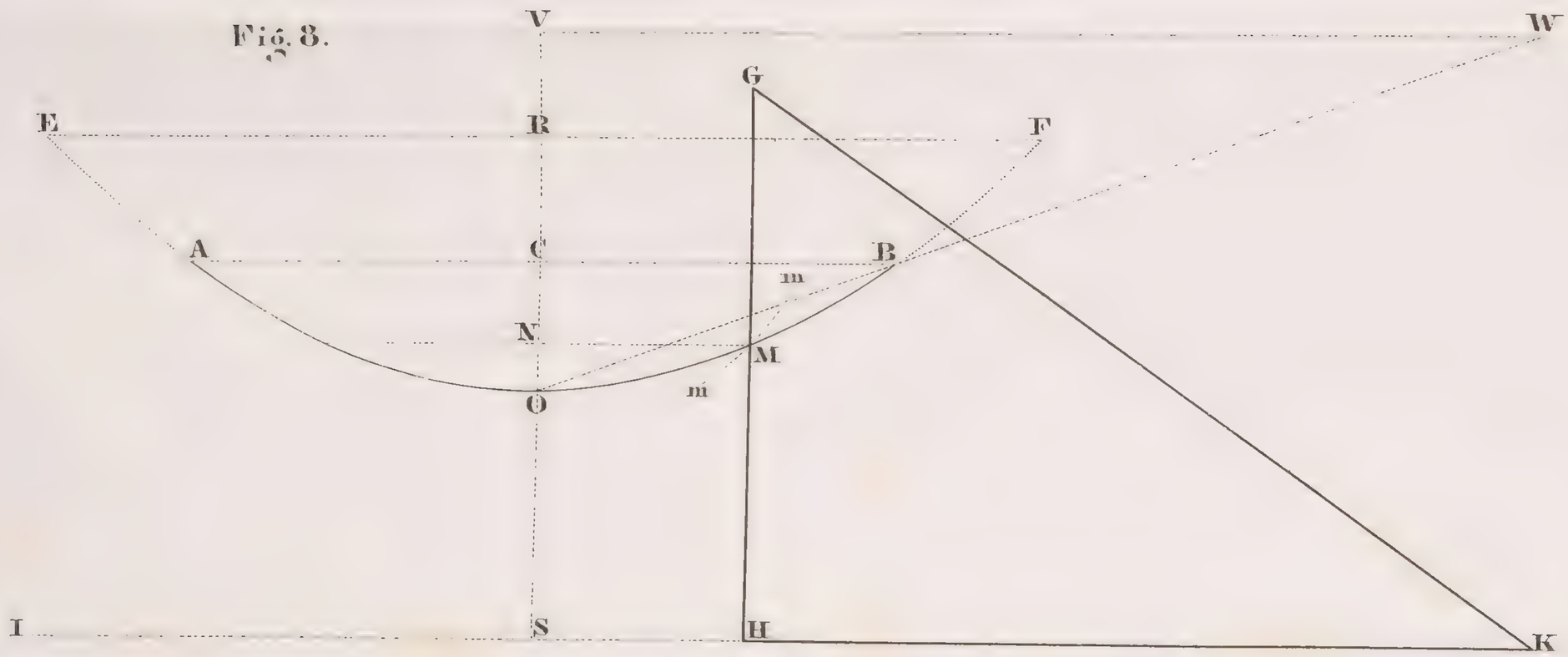


Fig. 7.

Fig. 8.



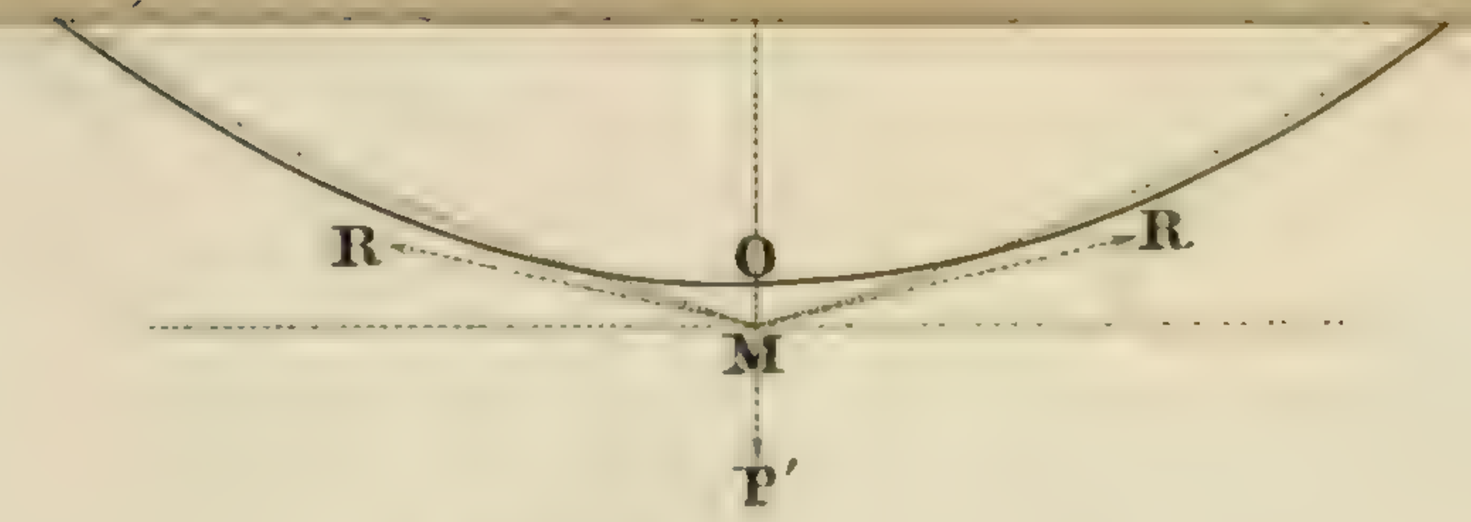
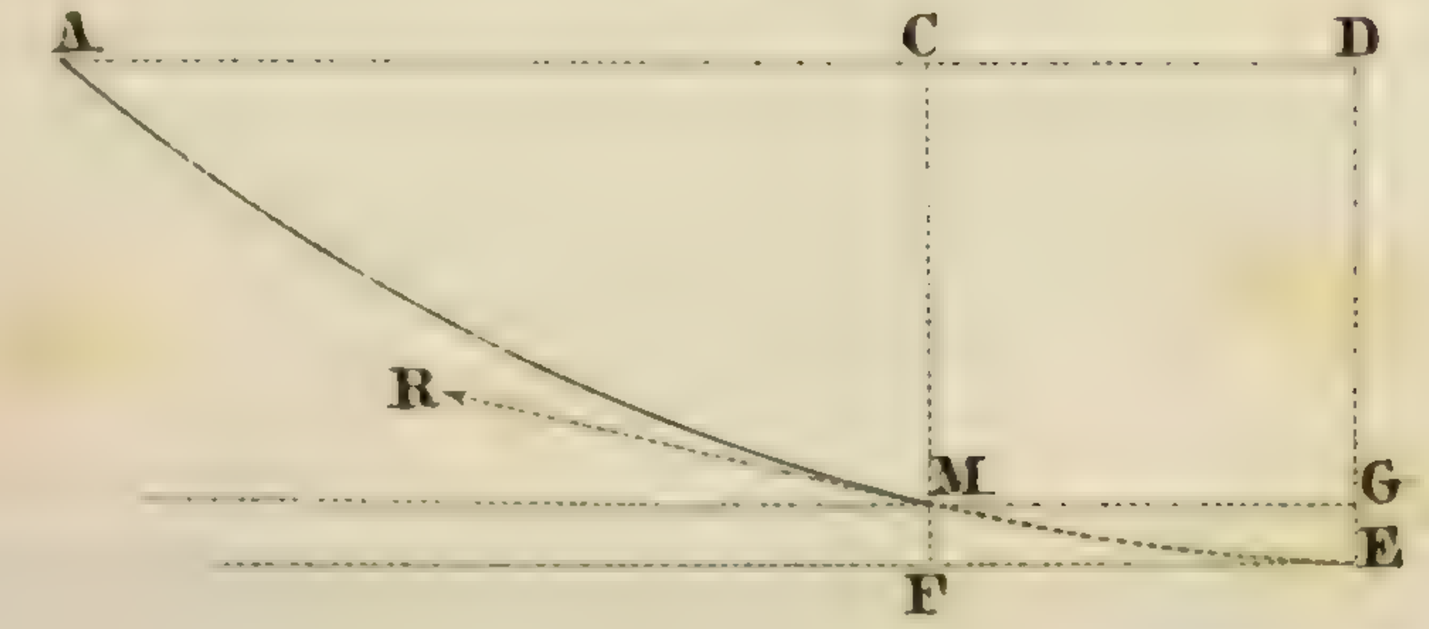


Fig. 13.



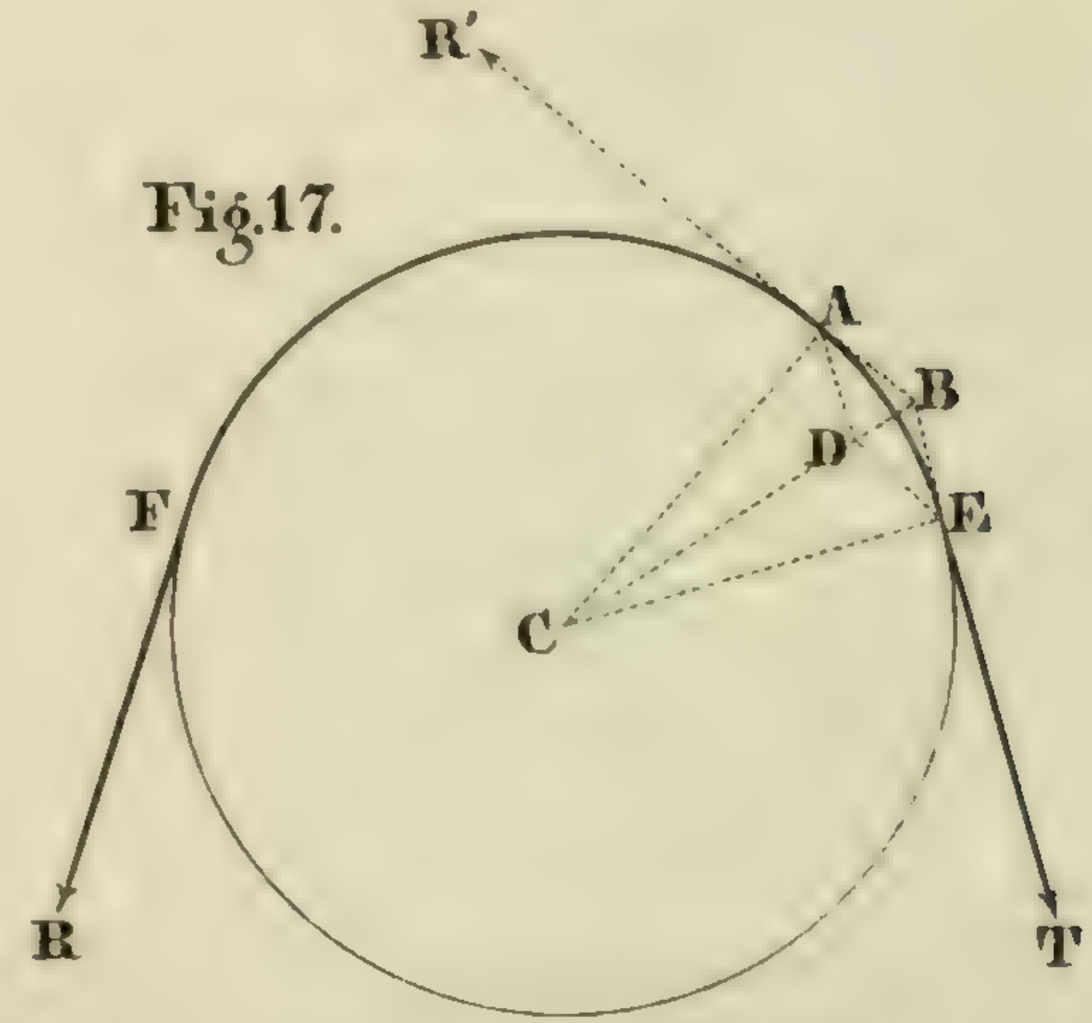


Fig. 17.

Fig.9.

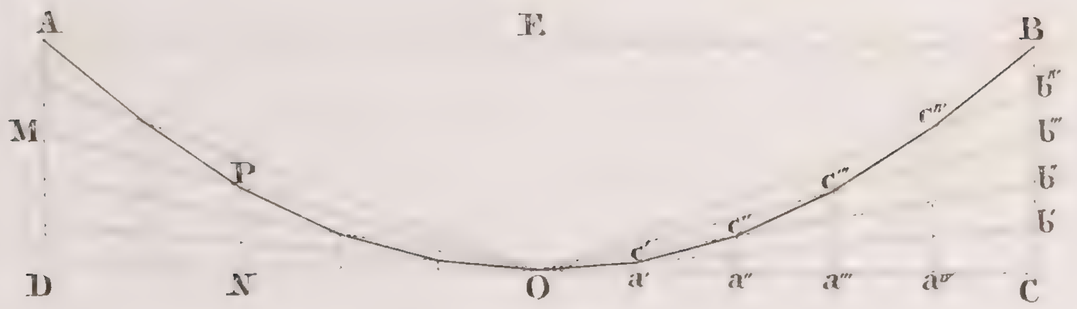


Fig.10.

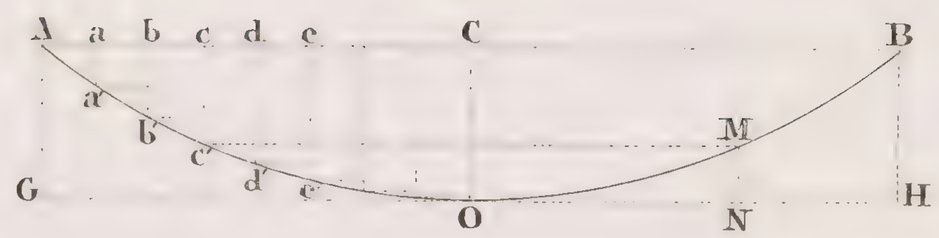


Fig.12.

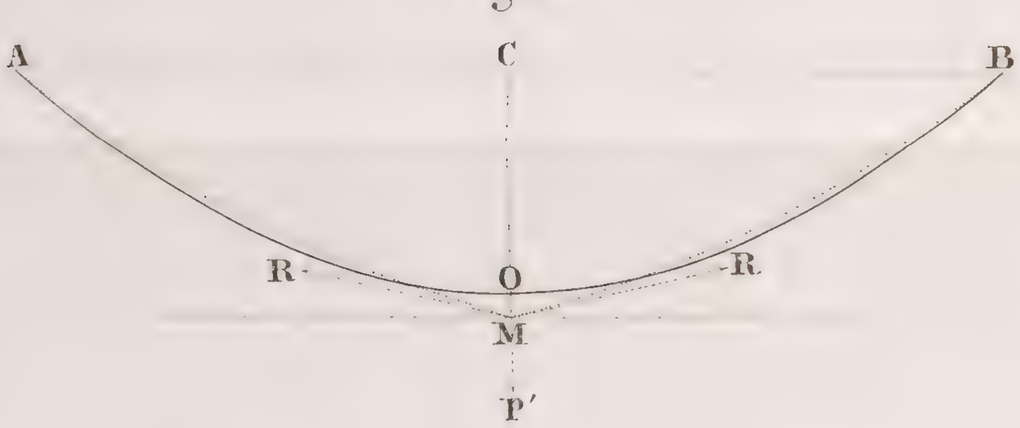


Fig.11.

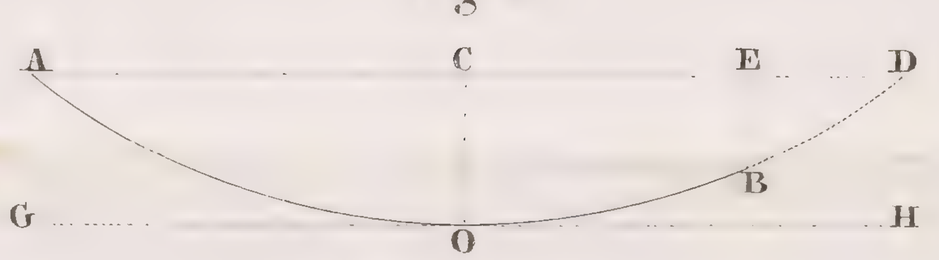
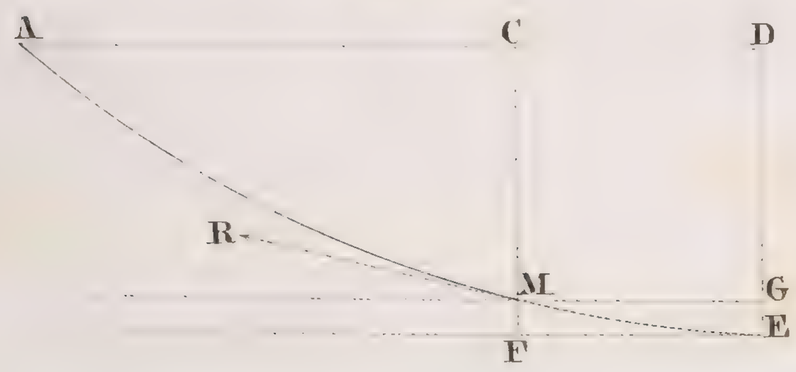


Fig.13.



R′

Fig.17.

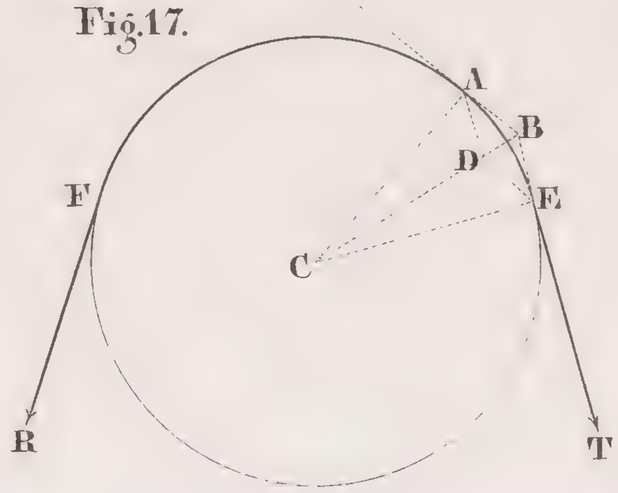


Fig. 14.

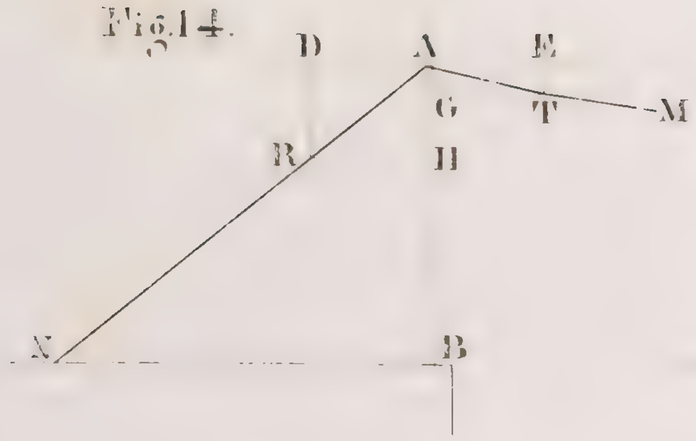


Fig. 15.

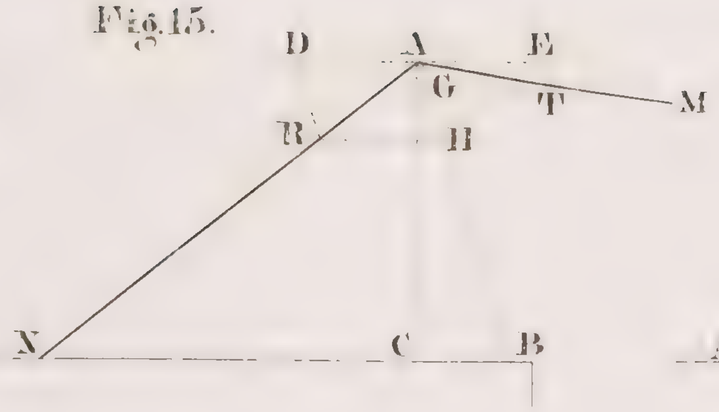


Fig. 19.

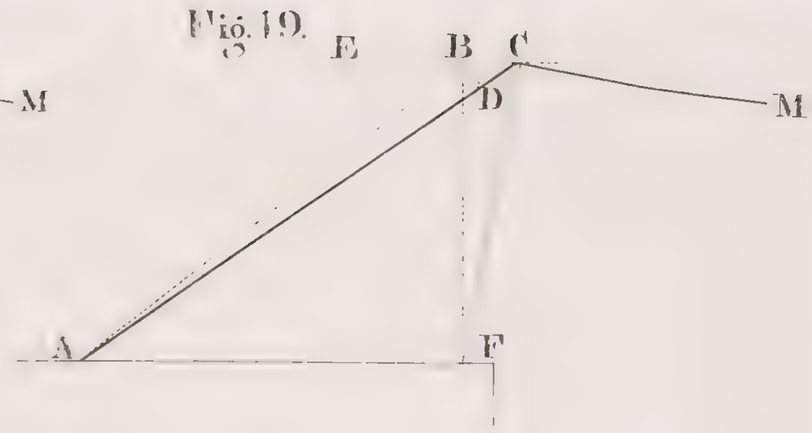


Fig. 16.

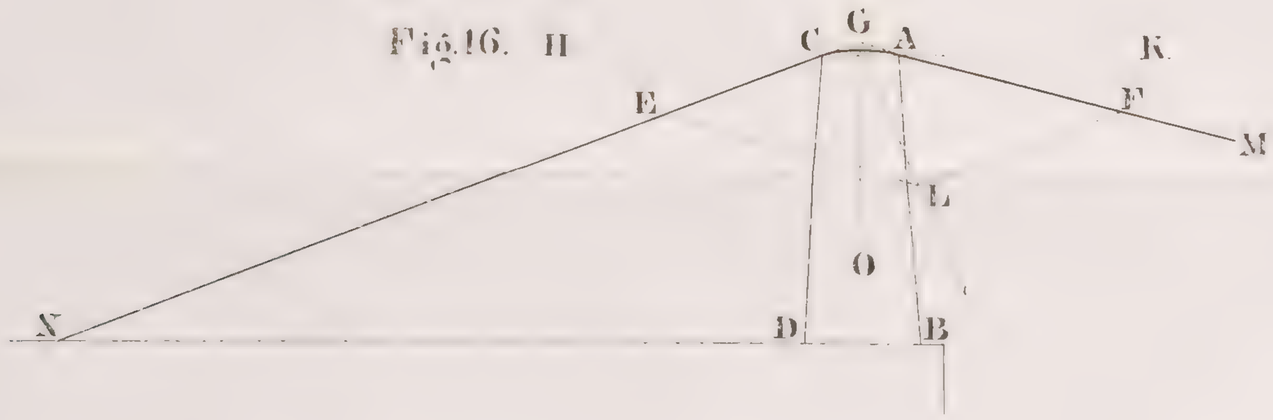


Fig. 20.

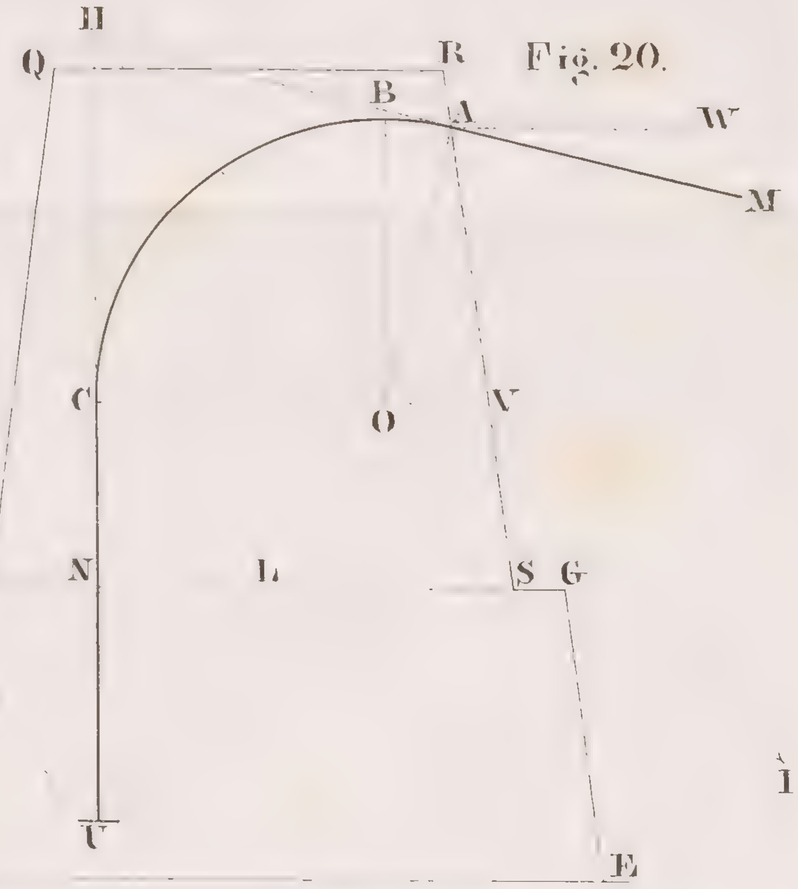


Fig. 18.

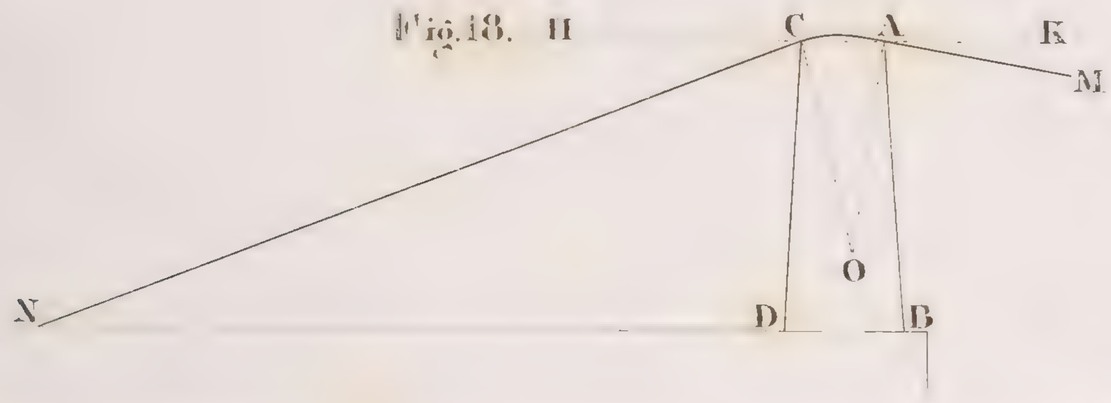


Fig. 21.

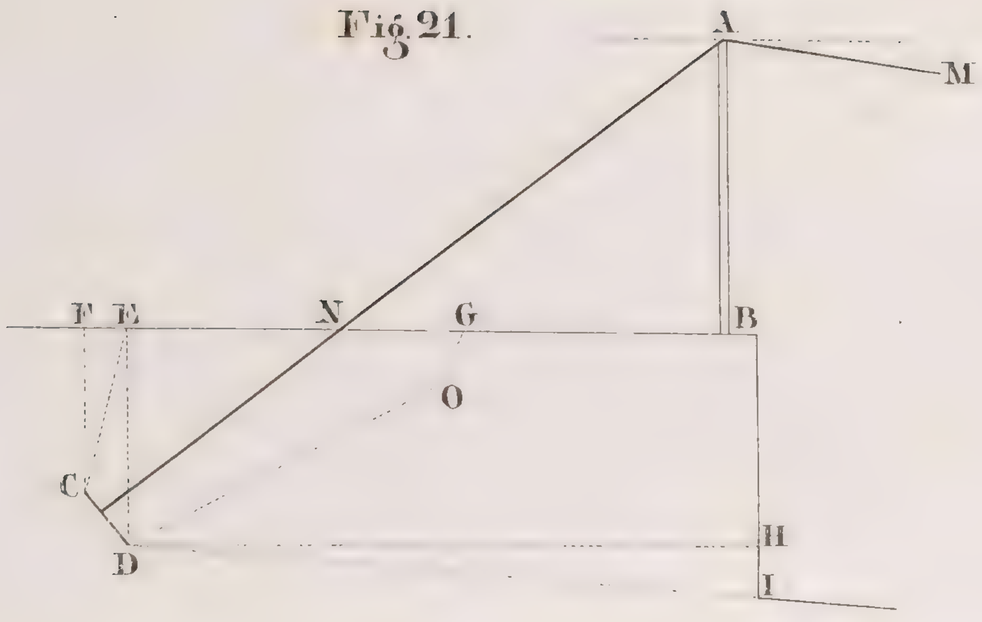


Fig. 23.

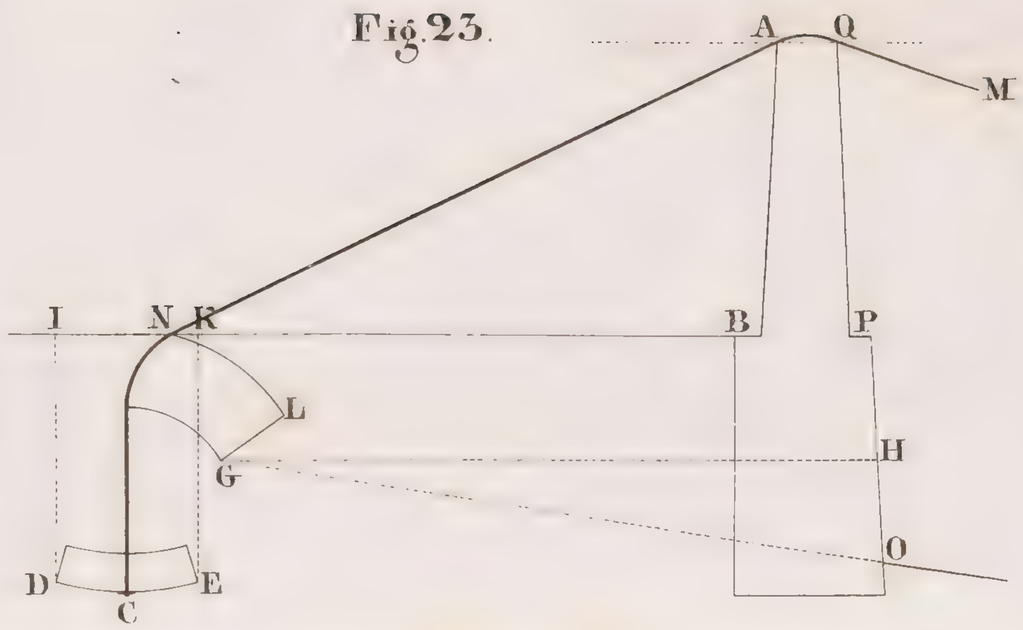


Fig. 22.

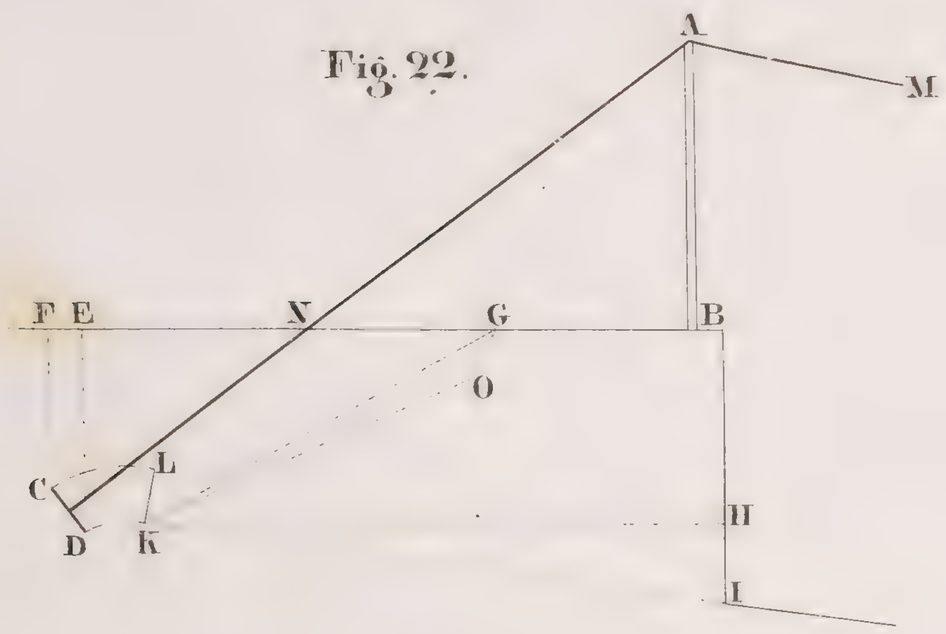
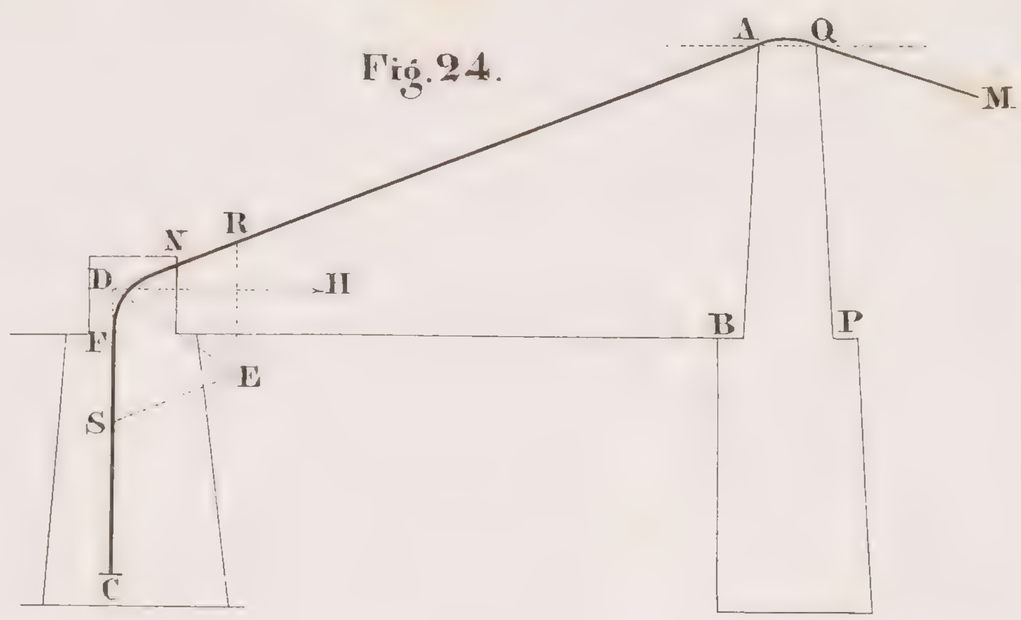


Fig. 24.



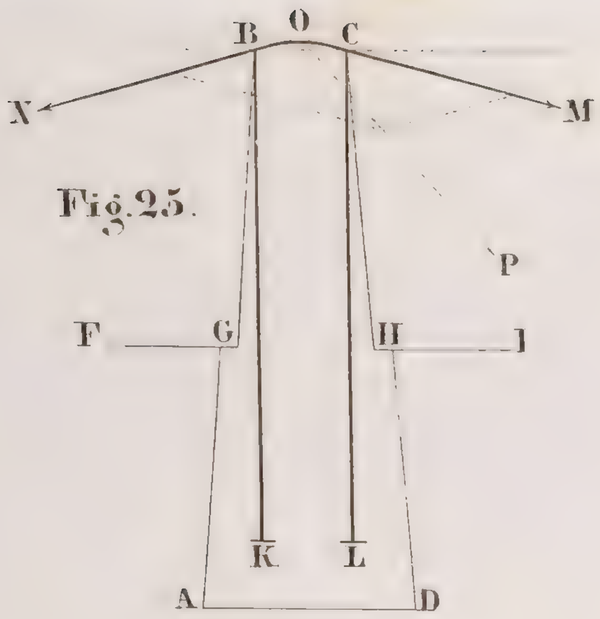


Fig. 25.

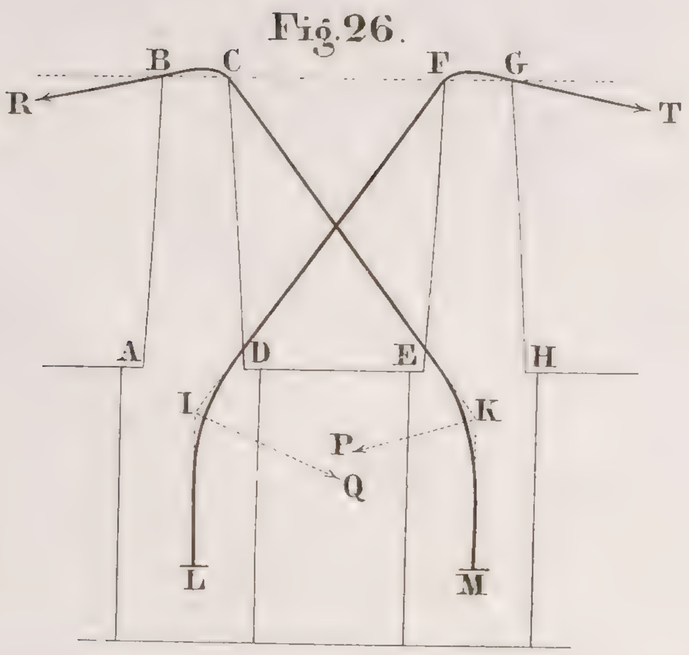


Fig. 26.

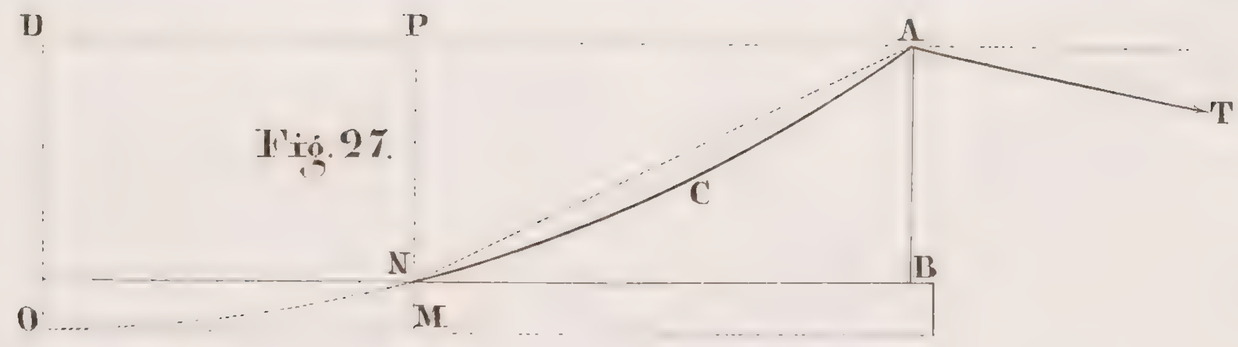


Fig. 27.

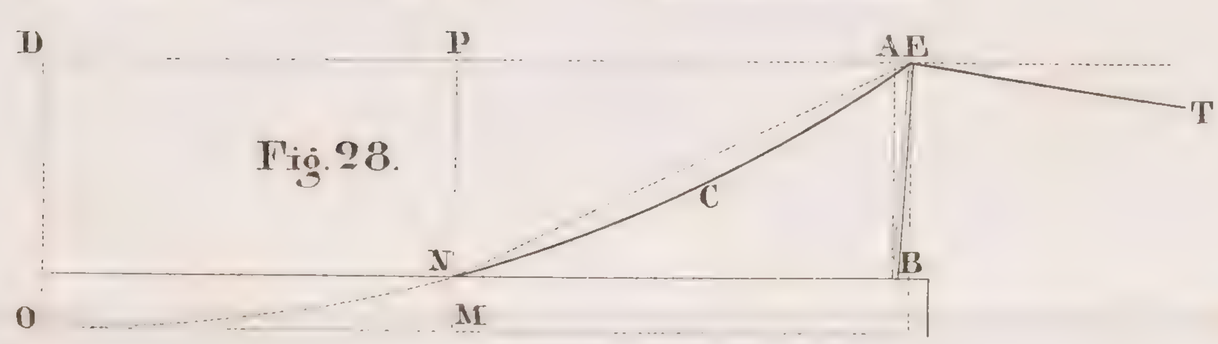


Fig. 28.

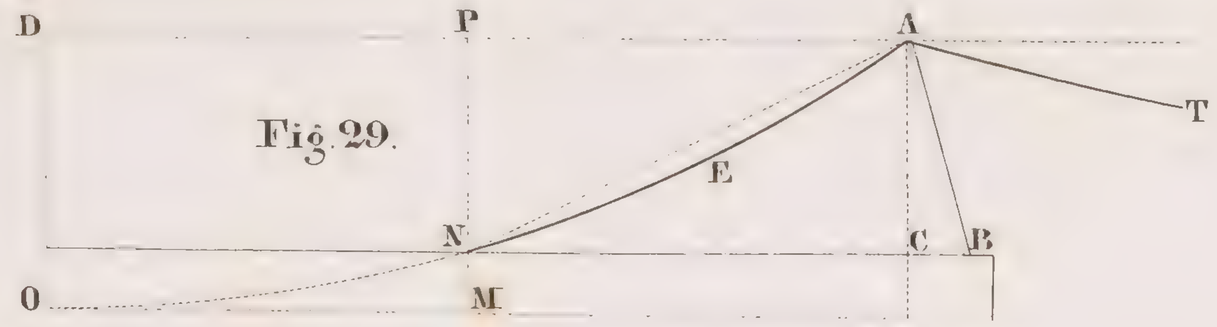


Fig. 29.

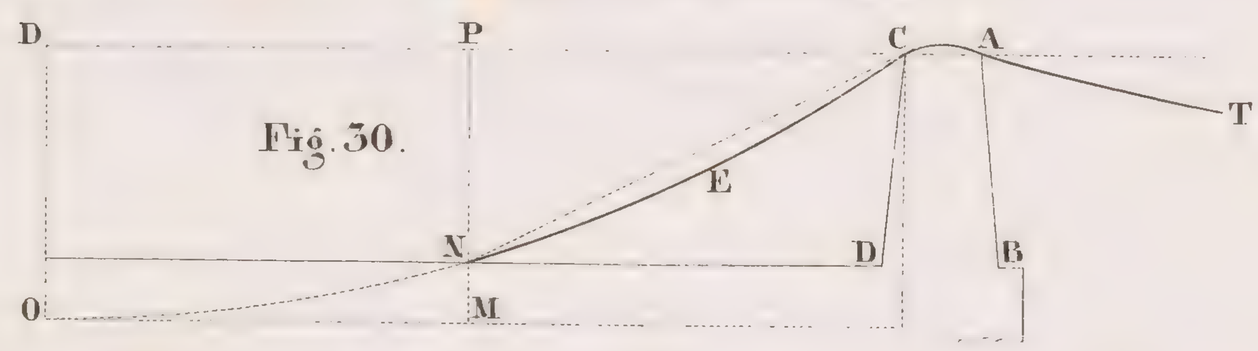


Fig. 30.

Fig. 32.

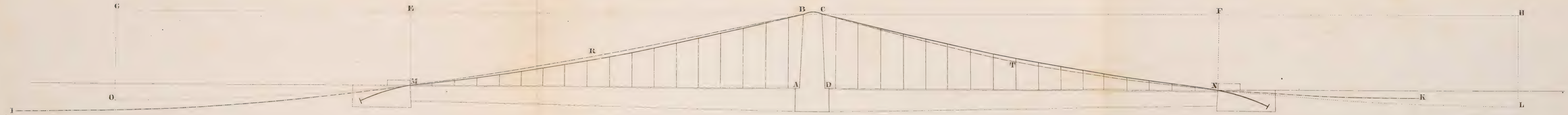
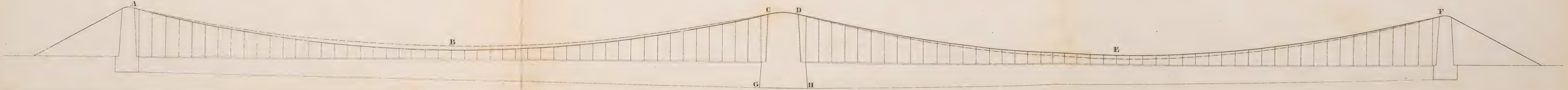


Fig. 31.



Engl

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Ferdinand

Der Bau der Ketten-Brücken, begründet auf die Gesetze des Gleichgewichtes der dabei in Wechselwirkung tretenden Kräfte, und bearbeitet für das praktische Bedürfniss ohne Hilfe der Differential- und Integral-Rechnung

Wien 1850

A.hydr. 48 r
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10059886-3